2005 年 11 月 15 日（今野）

10 月 25 日出題のレポートのコメント (情報統計学)

よくできているとレポートには $\boxed{\text{よくできました}}$ の判が押してあります．判のないレポートは下記を参考にして考えてみてください．それでも不明な点は質問に来てください．

$\boxed{\text{問題 52 の (5) について}}$ 期待値の定義に従えば，

$$\mathbb{E}[g(X_1,\, X_2,\, \ldots\,,\, X_n)] = \begin{cases} \int\cdots\int g(x_1,\, \ldots\,,\, x_n)\Pi_{i=1}^n f_X(x_i)\, dx_i & \text{連続型} \\ \sum\cdots\sum g(x_1,\, \ldots\,,\, x_n)\Pi_{i=1}^n f_X(x_i) & \text{離散型} \end{cases}$$

となる．ただし，$f_X((x)$ は確率密度関数または確率関数である．$g(X_1,\, X_2,\, \ldots\,,\, X_n) = 12$ とすればよい．積分または和を求める時には，確率密度関数または確率関数の性質

$$\int f_X(x)\, dx = 1 \qquad \text{または} \qquad \sum f_X(x) = 1$$

に注意すれば，$\mathbb{E}[T_5] = 12$ がわかる．分散は定義に従えばよい．分散は確率変数のばらつきを表す量なので，ばらついていないものの分散は 0 となる．

$\boxed{\text{問題 54 の (3) について}}$ X_1 と X_2 の同時確率密度関数は

$$f_{X_1,\,X_2}(x_1,\, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & (0 < x_1 < 2,\, 0 < x_2 < 2), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．また，

$$0 < x_1 < 2,\, 0 < x_2 < 2 \iff 0 < t_1 + t_2 < 4,\, 0 < t_1 - t_2 < 4$$

となる．3.5.2 節の議論（前期の内容）を利用すれば，

$$f_{T_1,\,T_2}(t_1,\, t_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & \underline{(0 < t_1 + t_2 < 4,\, 0 < t_1 - t_2 < 4)}, \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．<u>$f_{T_1,\,T_2}(t_1,\, t_2) > 0$ となる $(t_1,\, t_2)$ の領域を作図するとよい</u>．領域 $\{(t_1,\, t_2) :\, 0 < t_1 + t_2 < 4,\, 0 < t_1 - t_2 < 4\}$ はふたつの領域に分割できる：

(a) $\{(t_1,\, t_2) :\, 0 < t_1 < 2,\, -t_1 < t_2 < t_1\}$

(b) $\{(t_1,\, t_2) :\, 2 \le t_1 < 4,\, t_1 - 4 < t_2 < -t_1 + 4\}$

したがって，(a) の場合には，

$$f_{T_1}(t_1) = \int_{-t_1}^{t_1} f_{T_1,\,T_2}(t_1,\, t_2)\, dt_2 \qquad (0 < t_1 < 2)$$

となる．一方，(a) の場合には，

$$f_{T_1}(t_1) = \int_{t_1-4}^{-t_1+4} f_{T_1,T_2}(t_1,\, t_2)\,dt_2 \qquad (2 \le t_1 < 4)$$

となる．求めた答えが確率密度関数の条件をみたしているかを確認するとミスを発見できる．

$\boxed{\text{問題 56 の (1) について}}$　積率母関数を用いる方法と直接分布関数を求める方法がある．積率母関数を求めるためには，

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}[\exp(tX)] = \mathbb{E}[\exp(tZ^2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tz^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2/2)\,dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-(1-2t)z^2/2)\,dz \end{aligned}$$

となる．あとは，$t < 1/2$ の場合について，$w = \sqrt{1-2t}z$ と変数変換して，標準正規分布の確率密度関数の性質を用いればよい．

分布関数を直接求めるには，$x > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z^2 \le x) &= \mathbb{P}(-\sqrt{x} \le Z \le \sqrt{x}) = \mathbb{P}(Z \le \sqrt{x}) - \mathbb{P}(Z \le -\sqrt{x}) \\ &= \int_{-\infty}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-s^2/2}\,ds - \int_{-\infty}^{-\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-s^2/2}\,ds \end{aligned}$$

となる．あとは

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\mathbb{P}(Z^2 \le x)$$

に注意すればよい．ただし，微積分の基本定理と合成関数の微分の計算には注意すること．

$$\mathbb{P}(X \le 0) = \mathbb{P}(Z^2 \le 0) = 0$$

となるので，$x < 0$ のときは，$f_X(x) = 0$ となることは明らか．

$\boxed{\text{問題 56 の (4) について}}$　$X_1 + X_2$ の積率母関数を求める：

$$M_{X_1+X_2}(t) = \mathbb{E}[\exp(t(X_1+X_2))] = \mathbb{E}[\exp(tX_1)\exp(tX_2)] = \mathbb{E}[\exp(tX_1)]\mathbb{E}[\exp(tX_2)]$$

に注意すればよい．最後の等号は $X_1,\, X_2$ の独立性より成立することに注意せよ．

$\boxed{\text{問題 61 について}}$

$$\{(r,\, t) :\, f_{R,T}(r,\, t) > 0\} = \{(r,\, t) :\, 0 < r < 1,\, \frac{r}{2} < t < 1 - \frac{r}{2}\}$$

となることを

$$\begin{cases} r = x_{(n)} - x_{(1)} \\ 2t = x_{(n)} + x_{(1)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 < x_{(n)} = \frac{2t+r}{2} < 1 \\ 0 = x_{(1)} = \frac{2t-r}{2} < 1 \end{cases}$$

より作図をして求めるみるとよい．