第6章　点推定法

6.1　点推定量の性質

6.1.1　近隣度 (closeness)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を確率（密度）関数 $f_X(x|\theta)$ からの標本の大きさが n のランダム標本とする．$\Theta \subset \mathbb{R}^k$ を θ の母数空間とし，確率（密度）関数 $f_X(x|\theta)$ は未知母数 θ のみに依存するものとする．$\tau : \Theta \to \mathbb{R}$ とし，$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ とおく．

定義 6.1 $t(\boldsymbol{X})$ と $t'(\boldsymbol{X})$ を $\tau(\theta)$ の推定量とする．$t'(\boldsymbol{X})$ が $t(\boldsymbol{X})$ より集中した $\tau(\theta)$ の推定量であるとは，すべての $\lambda > 0$ に対して

$$\mathbb{P}_\theta[|t'(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta)| \leq \lambda] \geq \mathbb{P}_\theta[|t(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta)| \leq \lambda], \qquad \theta \in \Theta$$

を満足することをいう．$t^* = t^*(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta)$ が最も集中しているとは，他のどんな推定量より集中していることをいう．

注意 6.1 t^* は最も望ましい推定量であるが，ほとんどの場合は存在しない．

定義 6.2 (Pitman's closeness) $t'(\boldsymbol{X})$ が $t(\boldsymbol{X})$ より Pitman の意味で $\tau(\theta)$ に近い推定量であるとは

$$\mathbb{P}_\theta\left[|t'(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta)| < |t(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta)|\right] > \frac{1}{2}, \qquad \theta \in \Theta$$

を満足することである．

$t^*(\boldsymbol{X})$ が Pitman の意味で $\tau(\theta)$ の最近隣推定量であるとは，どんな推定量 $t(\boldsymbol{X})$ よりも Pitman の意味で $\tau(\theta)$ に近いものをいう．

注意 6.2 これもなかなか存在しない．

6.1.2　平均 2 乗誤差

定義 6.3 $t(\boldsymbol{X})$ を $\tau(\theta)$ の推定量とする．推定量 $t(\boldsymbol{X})$ の平均 *2* 乗誤差を

$$\mathbb{E}_\theta[(t(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta))^2]$$

これを $MSE(\theta, t)$ と記すことにする．で定義する．

注意 6.3 $\mathbb{E}_\theta$ の θ は考えている標本が分布族の中のどこから来ているかを明示するために用いている．すなわち

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\theta[(t(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta))^2] \\ &\quad = \int \cdots \int [t(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \tau(\theta)]^2 f(x_1|\theta) f(x_2|\theta) \times \cdots \times f(x_n|\theta)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n\end{aligned}$$

である．

注意 6.4 $t_1(\boldsymbol{X})$ と $t_2(\boldsymbol{X})$ の平均 *2* 乗誤差はどもに θ の関数となる．

例 6.1 $\tau(\theta) = \theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ とする．$\theta_0 \in \Theta$ を固定し，

$$t_{\theta_0}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \theta_0$$

なる推定量 $t_{\theta_0}(\boldsymbol{X})$ を考える．$t_{\theta_0}(\boldsymbol{X})$ の平均 *2* 乗誤差は

$$MSE\ (\theta, t_{\theta_0}) = \mathbb{E}_\theta[(t_{\theta_0}(\boldsymbol{X}) - \theta)^2] = \mathbb{E}_\theta[(\theta_0 - \theta)^2] = (\theta_0 - \theta)^2$$

となる．すなわち，

$$MSE\ (\theta_0, t_{\theta_0}) = 0$$

なる．

いま，すべての推定量 $t(\boldsymbol{X})$ に対して

$$MSE\ (\theta, t^*) \leq\ MSE\ (\theta, t), \qquad \forall\theta \in \Theta$$

を満足するような推定量 $t^*(\boldsymbol{X})$ が存在するならば，

$$MSE\ (\theta, t^*) = 0$$

とならなければいけない(6-1)．これは常に θ を正しく推定できることある．したがって，θ がわかっていることと同じである．

θ に関して一様に MSE を最小にする推定量を見つけることができない理由はすべての推定量の集合は大きすぎるからである．したがって，対象とする推定量の集合を小さくしよう．

定義 6.4 推定量 $t(\boldsymbol{X})$ が $\tau(\theta)$ の不偏推定量であるとは，すべての $\theta \in \Theta$ に対して

$$\mathbb{E}_\theta[t(\boldsymbol{X})] = \tau(\theta)$$

を満足することである．

例 6.2 $t_{\theta_0}(\boldsymbol{X})$ は θ の不偏推定量ではない．なぜならば，$\theta \neq \theta_0$ のとき

$$\mathbb{E}_\theta[t_{\theta_0}(\boldsymbol{X})] = \theta_0 \neq \theta$$

からわかる．

定理 6.1 $t(\boldsymbol{X})$ は $\tau(\theta)$ の推定量とし，$\mathbb{E}_\theta|t(\boldsymbol{X})|^2 < \infty$ とする．このとき，

$$MSE\ (\theta, t) = \mathbb{VAR}(t(\boldsymbol{X})) + \{\mathbb{E}_\theta[t(\boldsymbol{X})] - \tau(\theta)\}^2$$

が成立する．さらに，$t(\boldsymbol{X})$ が $\tau(\theta)$ の不偏推定量ならば，

$$MSE\ (\theta, t) = \mathbb{VAR}(t(\boldsymbol{X}))$$

が成立する．

証明

$$\begin{aligned}\text{MSE }(\theta,\,t) &= \mathbb{E}_\theta[\{t(\boldsymbol{X})-\mathbb{E}_\theta[t(\boldsymbol{X})]+\mathbb{E}_\theta[t(\boldsymbol{X})]-\tau(\theta)\}^2]\\ &= \mathbb{E}_\theta[\{t(\boldsymbol{X})-\mathbb{E}_\theta[t(\boldsymbol{X})]\}^2]\\ &\quad +2(\mathbb{E}_\theta[t(\boldsymbol{X})]-\tau(\theta))\mathbb{E}_\theta[t(\boldsymbol{X})-\mathbb{E}_\theta[t(\boldsymbol{X})]]\\ &\quad +\{\mathbb{E}_\theta[t(\boldsymbol{X})]-\tau(\theta)\}^2\\ &= \mathbb{VAR}(t(\boldsymbol{X}))+\{\mathbb{E}_\theta[t(\boldsymbol{X})]-\tau(\theta)\}^2\end{aligned}$$

□

定義 6.5 $BIAS = \mathbb{E}_\theta[t(\boldsymbol{X})-\tau(\theta)]$ を推定量 $t(\boldsymbol{X})$ のバイアスという.

例 6.3 $X_1, X_2, \ldots, X_n (n \geq 2)$ を $N(\mu, \sigma^2)$ からのランダム標本とする.

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \qquad U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=}^n (X_i-\bar{X}_n)^2 \qquad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=}^n (X_i-\bar{X}_n)^2$$

とおく.

$\mathbb{E}_{\mu,\,\sigma^2}[\bar{X}_n]=\mu$ より $\bar{X}_n$ は μ の不偏推定量である. また, $\bar{X}_n$ の MSE ($\tau(\mu,\,\sigma^2)=\mu$) は

$$MSE\ (\mu,\,\bar{X}_n) = \mathbb{E}_{\mu,\,\sigma^2}[(\bar{X}_n-\mu)^2] = \frac{\sigma^2}{n}$$

である.

一方,

$$\mathbb{E}_{\mu,\,\sigma^2}[S^2] = \mathbb{E}_{\mu,\,\sigma^2}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2-(\bar{X}_n-\mu)^2] = \sigma^2-\frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

となり, σ^2 の最尤推定量は σ^2 の不偏推定量ではない. しかし,

$$\mathbb{E}_{\mu,\,\sigma^2}[U^2] = \mathbb{E}_{\mu,\,\sigma^2}[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2-\frac{n}{n-1}(\bar{X}_n-\mu)^2] = \frac{n}{n-1}\sigma^2-\frac{1}{n-1}\sigma^2 = \sigma^2$$

となり, U^2 は σ^2 の不偏推定量である.

例 6.4 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をベルヌーイ試行(6-2) $\mathrm{Bi}(1,\,p)$ からのランダム標本とする. ただし, $0<p<1$ とする. 標本平均 $\bar{X}_n$ は p の不偏推定量となる. $\tau(p)=p$ として, $\bar{X}_n$ の MSE を求めよう.

$$MSE(p,\,\bar{X}_n) = \mathbb{E}[(\bar{X}_n-p)^2] = \mathbb{VAR}[\bar{X}_n] = \frac{p(1-p)}{n}$$

となる. いま, $Y=\sum_{i=1}^n X_i$ として,

$$\hat{p}_B = \frac{Y+\alpha}{\alpha+\beta+n}$$

なる推定量を考えよう. ただし, α と β は (n に依存する) 定数とする. 定理 6.1 を利用して,

$$\begin{aligned}MSE(p,\,\hat{p}_B) &= \mathbb{VAR}[\hat{p}_B]+\{\mathbb{E}[\hat{p}_B]-p\}^2\\ &= \mathbb{VAR}\left[\frac{Y+\alpha}{\alpha+\beta+n}\right]+\left[\frac{np+\alpha}{\alpha+\beta+n}-p\right]^2\\ &= \frac{1}{(\alpha+\beta+n)^2}\mathbb{VAR}[Y]++\left[\frac{np+\alpha}{\alpha+\beta+n}-p\right]^2\\ &= \frac{np(1-p)}{(\alpha+\beta+n)^2}++\left[\frac{np+\alpha}{\alpha+\beta+n}-p\right]^2\end{aligned}$$

となる．ここで $\alpha = \beta = \sqrt{n/4}$ とおけば，

$$MSE(p, \hat{p}_B) = \frac{n}{4(\sqrt{n} + n^2)}$$

となる(6-3)．

6.1.3 推定量の一致性

定義 6.6 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ とする．$\tau(\theta)$ の推定量の列 $\{t_n(\boldsymbol{X})\}_{n=1}^{\infty}$ が平均 2 乗誤差の意味で $\tau(\theta)$ の一致推定量であるとは，すべての $\theta \in \Theta$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\theta[(t_n(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta))^2] = 0$$

を満足することである．

注意 6.5 推定量 $t_n(\boldsymbol{X})$ が平均 2 乗誤差の意味で一致性を持てば，定理 6.1 から

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\theta[t_n(\boldsymbol{X})] = \tau(\theta), \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{VAR}_\theta[t_n(\boldsymbol{X})] = 0$$

となる．

例 6.5 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を平均 μ，分散 σ^2 の分布からのランダム標本とする．ただし，$\sigma < \infty$ とする．$\{\bar{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を μ の推定量の列とすれば，

$$\mathbb{E}_{\mu,\sigma^2}[\{\bar{X}_n - \mu\}^2] = \mathbb{VAR}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$$

よって，$\bar{X}_n$ は平均 2 誤差の意味で一致性を持つ．

定義 6.7 $\tau(\theta)$ の推定量の列 $\{t_n(\boldsymbol{X})\}_{n=1}^{\infty}$ が弱一致性を持つとは，どんな正の数 ϵ に対しても

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta[|t_n(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta)| < \epsilon] = 1, \qquad {}^\forall\theta \in \Theta$$

が成立することである．簡単に，このような推定量 $t_n(\boldsymbol{X})$ を弱一致推定量という．

注意 6.6 $t_n(\boldsymbol{X})$ が平均 2 乗誤差の意味で一致推定量であれば，$t_n(\boldsymbol{X})$ は弱一致推定量である．なぜならば，Markov の不等式から

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta[|t_n(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta)| < \epsilon] &= 1 - \mathbb{P}_\theta[|t_n(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta)| \geq \epsilon] \\
&= 1 - \mathbb{P}_\theta[|t_n(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta)|^2 \geq \epsilon^2] \\
&\geq 1 - \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}_\theta[(t_n(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta))^2] \nearrow 1, \qquad n \to \infty
\end{aligned}$$

からわかる．