2005 年 12 月 06 日（今野）

11 月 22 日出題のレポートのコメント (情報統計学)

よくできているとレポートには $\boxed{\text{よくできました}}$ の判が押してあります．判のないレポートは下記を参考にして考えてみてください．それでも不明な点は質問に来てください．

$\boxed{\text{問題 63 の (1) について}}$ 与えられた確率関数から X_n の分布関数は

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < c, \\ 1 - \dfrac{1}{n} & c \le x < c + n, \\ 1 & x \ge c + n \end{cases}$$

となることに注意する．$X_n \xrightarrow{P} c$ を示すためには，任意の正数 ϵ に対して，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - c| > \epsilon) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n - c < -\epsilon \text{または} X_n - c > \epsilon) \\ &= \lim_{n\to\infty} \{\mathbb{P}(X_n - c < -\epsilon) + \mathbb{P}(X_n - c > \epsilon)\} \\ &\quad \text{（排反な事象の和はそれぞれの確率の和となることより）} \end{aligned}$$

あとは

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n < c - \epsilon) + \mathbb{P}(X_n > c + \epsilon) &= F_{X_n}((c - \epsilon)-) + 1 - F_{X_n}(c + \epsilon) \\ &= 0 + 1 - (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

からわかる．上の式は $\mathbb{P}(X_n > c+\epsilon) = 1 - \mathbb{P}(X_n \le c+\epsilon)$ と $F_{X_n}(x-) = \lim_{h\to 0,\, h<0} F_{X_n}(x+h) = \mathbb{P}(X_n < x)$ に注意すればよい．

$\boxed{\text{問題 64 の (2) について}}$

$$\mathbb{E}[X_1(X_1 - 1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{e} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{e}$$

に書き換え，$\ell = k - 2$ として，最右辺の式を変形するとよい．

$\boxed{\text{問題 64 の (5) と (6) について}}$ 問題にタイプミスがあり，<u>Y_n を X_n に変更</u>．$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ を独立同一に母数 1 のポアソン分布に従うとしたとき，$Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ は母数 n のポアソン分布に従う．したがって，

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \quad \text{と} \quad \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n - n}{\sqrt{n}}$$

は同一分布に従う．すなわち，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \le x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n - n}{\sqrt{n}} \le x\right)$$

となるので，上の式の左辺の確率を評価すればよいことがわかる．$\bar{Z}_n = (1/n)(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$ とする．$\mathbb{E}[Z_1] = 1$, $\mathbb{VAR}[Z_1] = 1$ に注意して，中心極限定理を用いると

$$\frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{Z}_n - 1)}{1} \xrightarrow{d} N(0,\, 1) \tag{1}$$

がわかる．すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \le x\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n - n}{\sqrt{n}} \le x\right) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \end{aligned}$$

がわかる．最後の等号は，(1) よりわかる．