情報統計学の演習問題 (その５)

$\boxed{\text{問題 67}}$　X_1, X_2 は正規分布 $N(0, 1)$ からの標本の大きさが 2 のランダム標本とする．

$$\begin{cases} S = X_1 + X_2 \\ R = X_1 - X_2 \end{cases}$$

としたとき，つぎの問いに答えよ．

(1) S と R の共分散 $\mathbb{COV}(S, R) = \mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])(R - \mathbb{E}[R])]$ を求めよ．

(2) (S, R) の同時確率密度関数を求めよ．

(3) R の確率密度関数を求めよ．

(4) S と R は独立かどうかを調べよ．

$\boxed{\text{問題 68}}$　確率変数 X を確率関数

$$f(x|\,\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|}(1-\theta)^{1-|x|}, \qquad x = -1, 0, 1$$

からの標本の大きさが 1 のランダム標本とする．ただし，$0 < \theta < 1$ とする．ふたつの統計量

$$S = S(X) = |X|, \qquad T = T(X) = \begin{cases} 2, & (X = 1) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を考える．

(1) S の確率分布および S が与えられたときの X の条件付確率分布を求め，S は θ の十分統計量かどうかを調べよ．

(2) S は θ の不偏推定量かどうかを調べよ．

(3) T は θ の不偏推定量かどうかを調べよ．

(4) S と T の MSE（平均 2 乗誤差）を比較せよ．(縦軸を θ とし，横軸を MSE の値として，S と T の MSE をグラフに描き比較すること)

$\boxed{\text{問題 69}}$　$X_1, X_2, \ldots, , X_m$ を正規分布 $N(\theta, \sigma^2)$ からの標本の大きさが m のランダム標本とし，$Y_1, Y_2, \ldots, , Y_m$ を正規分布 $N(\theta, \tau^2)$ からの標本の大きさが n のランダム標本とする．ここで，$X_1, X_2, \ldots, , X_m$ と $Y_1, Y_2, \ldots, , Y_m$ は互いに独立する．また，σ^2 と τ^2 は既知とする．定数 $a\,(0 \le a \le 1)$ に対して，

$$\widehat{\theta}_a = a\bar{X}_m + (1-a)\bar{Y}_n,$$

とする．ただし，$\bar{X}_m = (1/m)\sum_{i=1}^{m} X_i$ と $\bar{Y}_n = (1/n)\sum_{i=1}^{n} Y_i$ である．

(1) $\widehat{\theta}_a$ は θ の不偏推定量であることを示せ.

(2) $\widehat{\theta}_a$ の MSE を求め，$\widehat{\theta}_a$ の MSE を最小にする a は

$$a = \frac{\tau^2}{n} \Big/ \left(\frac{\sigma^2}{m} + \frac{\tau^2}{n} \right)$$

となることを示せ.

$\boxed{\text{問題 } 70}$　$X_1, X_2, \ldots, X_m$ と $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ をそれぞれ平均 μ_1，分散 σ^2 の正規分布と平均 μ_2，分散 σ^2 の正規分布からのランダム標本とする．ここで，$X_1, X_2, \ldots, X_m$ と $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ は独立であるとする.

(1) μ_1, μ_2, σ^2 の対数尤度関数から μ_1, μ_2, σ^2 の最尤推定量は以下で与えられることを示せ .

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X}, \quad \hat{\mu}_2 = \bar{Y}, \quad \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{m+n}\{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2\}.$$

(2) 最尤推定量のバイアスを求めよ．さらに，σ^2 の推定量

$$c\{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2\}.$$

が不偏推定になるように定数 c を定めよ.

$\boxed{\text{問題 } 71}$　$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を確率密度関数

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sigma}\exp\{-(x-\mu)/\sigma\} I_{(\mu,\infty)}(x)$$

をもつ分布からのランダム標本とする．ただし，$-\infty < \mu < \infty$，$\sigma > 0$ である.

(1) $\mathbb{E}(X-\mu)$ と $\mathbb{VAR}(X)$ を求めよ.

(2) μ は既知として，σ^2 の最尤推定量が $(\bar{X}-\mu)^2$ で与えられることを示せ．ただし，$\bar{X} = \sum X_i/n$ である.

(3) 最尤推定量 $(\bar{X}-\mu)^2$ のバイアスを計算せよ.（ヒント：$\sum(X_i-\mu)$ は母数 n, σ^{-1} のガンマ分布に従うことに注意せよ．）

(4)
$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$
は σ^2 の不偏推定量になることを示せ.

(5) μ は既知とし，$\mathbb{P}[X_1 > t](t > \mu)$ の最尤推定量を求めよ．（ヒント：確率を σ と t で表現し，それが σ の 1 対 1 の関数になっていることを利用せよ.）