2005 年 12 月 20 日（今野）

12 月 13 日出題のレポートのコメント (情報統計学)

今回は難しかったようです．下記を参考にして再度考えてみてください．それでも不明な点は質問に来てください．

$\boxed{\text{問題 68 の (1) について}}$ S は，取り得る値が $\{0, 1\}$ の確率変数であることに注意する．

$$S = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X = 0$$

なので，

$$\mathbb{P}(S=0) \;=\; \mathbb{P}(X=0) = f(0|\,\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|0|}(1-\theta)^{1-|0|} = 1-\theta$$

となる．また，

$$S = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad X = -1 \quad \text{または} \quad X = 1$$

である．すなわち，

$$\{S=1\} = \{X=-1\} \cup \{X=-1\} \qquad \text{かつ} \qquad \{X=-1\} \cap \{X=-1\} = \emptyset$$

である．これより

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S=1) &= \mathbb{P}(\{X=-1\} \cup \{X=1\}) = \mathbb{P}(X=-1) + \mathbb{P}(X=1) \\ &= f(-1|\,\theta) + f(1|\,\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|-1|}(1-\theta)^{1-|-1|} + \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|1|}(1-\theta)^{1-|1|} \\ &= \theta \end{aligned}$$

となる．よって，

$$f_S(s) = \begin{cases} \theta & (s=1), \\ 1-\theta & (s=0), \end{cases} \tag{1}$$

となることに注意する．この結果を利用して，S は θ の十分統計量であるかどうかを確認せよ．

$\boxed{\text{問題 68 の (2) について}}$ S の期待値は (1) を使えば簡単にわかる．しかし，X の確率分布を用いて次のよういにも表現される．離散型の確率変数の定義を思い出す：

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[|X|] = \sum_{x=-1,0,1} |x| f(x|\,\theta)$$

である．レポートを提出したもの全員が絶対値を忘れていた．

$\boxed{\text{問題 68 の (4) について}}$ S と T の MSE はともに定義域は開区間 $(0, 1)$ で値域は正の領域になるような関数である．

$\boxed{\text{問題 71}}$ 記号の定義の補足

$$I_{(\mu,\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & (x > \mu), \\ 0 & (x \le \mu), \end{cases}$$

である．

$\boxed{\text{問題 71 の (1) について}}$ 期待値の定義より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X-\mu] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x;\theta)\,dx \\ &= \int_{\mu}^{\infty} (x-\mu) \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\} dx \end{aligned}$$

となる．変数変換

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

を用いるとよい．分散は求めるために，

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

とおくと Y の確率密度関数は

$$f_Y(y) = e^{-y} I_{(0,\infty)}(y)$$

となることに注意する．ただし，

$$I_{(0,\infty)}(y) = \begin{cases} 1 & (y > 0), \\ 0 & (y \le 0), \end{cases}$$

分散の性質より

$$\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{VAR}[\sigma Y + \mu] = \sigma^2 \mathbb{VAR}[Y]$$

となる．さらに，分散の公式から

$$\mathbb{VAR}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \{\mathbb{E}[Y]\}^2$$

となることを利用する．あとは，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,dy = \int_0^{\infty} y^2 e^{-y}\,dy, \\ \mathbb{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0^{\infty} y e^{-y}\,dy, \end{aligned}$$

を計算すればよい．$\mathbb{E}[X-\mu]$ も上の式に帰着される．

$\boxed{\text{問題 71 の (2) について}}$ μ が既知とする．σ の最尤推定値 $\widehat{\sigma}$ を求め，最尤推定値の不変性 (定理 6.3) より σ^2 の最尤推定値は $(\widehat{\sigma})^2$ となることに注意する．$X_1 = x_1,\, X_2 = x_2,\, \ldots\,,\, X_n = x_n$ が与えられたときの σ の尤度関数は

$$\begin{aligned} L(\sigma|\, x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right\} = \frac{1}{\sigma^n} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}_n-\mu)}{\sigma}\right\}, \\ \bar{x}_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

となる．したがって，σ の対数尤度は

$$\ell(\sigma) = \log L(\sigma|\, x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_n) = -n\log\sigma - \frac{n(\bar{x}_n-\mu)}{\sigma}$$

したがって，σ の対数尤度について σ の最大化問題を解けば，σ の最尤推定値 $\widehat{\sigma}$ を求めることができる．

$\boxed{\text{問題 71 の (3) について}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\bar{X}_n-\mu)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)\right)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right] + \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}(X_i-\mu)(X_j-\mu)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[(X_i-\mu)^2\right] + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\mathbb{E}\left[(X_i-\mu)(X_j-\mu)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[(X_i-\mu)^2\right] + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\mathbb{E}[X_i-\mu]\,\mathbb{E}[X_j-\mu] \end{aligned}$$

となる．ただし，最後の等号は X_i と $X_j\,(i \neq j)$ の独立性よりわかる．

$\boxed{\text{問題 71 の (4) について}}$ 問題の推定量は $\mathbb{VAR}[X]$ の不偏推定量であることは講義の議論からはわかる．すなわち，

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right] = \mathbb{VAR}[X]$$

である．あとは (1) の結果を利用する．

$\boxed{\text{問題 71 の (4) について}}$

$$g(\sigma) = \mathbb{P}(X_1 > t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\} dx$$

を求める．最尤推定値の不変性 (定理 6.3) より $\mathbb{P}(X_1 > t) = g(\sigma)$ の最尤推定値は $g(\widehat{\sigma})$ となることを利用すればよい．