今野　(2005 年 10 月 3 日)

情報統計学の演習問題

$\boxed{\text{問題 54}}$　母集団分布がそれぞれつぎの場合について標本の大きさが n のランダム標本の同時確率密度関数または同時確率関数を書け.

(1) 母数 $p\,(0 < p < 1)$ のベルヌーイ分布

(2) 母数 $\lambda\,(\lambda > 0)$ のポアソン分布

(3) 区間 (a, b) 上の一様分布．ただし，$a < b$ である.

(4) 平均 μ，分散 $\sigma^2\,(< \sigma < \infty)$ の正規分布.

(5) 母数 $\lambda\,(\lambda > 0)$ の指数分布

$\boxed{\text{問題 55}}$　平均 μ，分散 $\sigma^2\,(0 < \sigma < \infty)$ の母集団分布からの標本の大きさが n のランダム標本を $X_1, X_2, \ldots, X_n\,(n \geq 4)$ とする．つぎの統計量の期待値と分散を求めよ.

(1) $T_1 = X_1$

(2) $T_2 = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$

(3) $T_3 = \sum_{i=1}^{n} X_i$

(4) $T_4 = \dfrac{1}{n} T_3$

(5) $T_5 = 12$

$\boxed{\text{問題 56}}$　平均 μ，分散 $\sigma^2\,(0 < \sigma < \infty)$ の母集団分布からの標本の大きさが n のランダム標本を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とする．統計量

$$T(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$$

を考える．ただし，$a_i, i = 1, 2, \ldots, n$ は既知の定数とする．簡単に $T(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を T とも書くことにする.

(1) T の平均 $\mathbb{E}[T]$ と分散 $\mathbb{VAR}[T]$ を求めよ.

(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ のとき

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n}$$

を示せ.

(3) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ という条件のもとで T の分散を最小にする $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を求めよ．

$\boxed{\text{問題 57}}$ X_1, X_2 は区間 $(0, 2)$ 上の一様分布からの標本の大きさが 2 のランダム標本とする．統計量

$$T_1 = X_1 + X_2, \qquad T_2 = X_1 - X_2$$

を考える．

(1) T_1 の期待値 $\mathbb{E}[T_1]$ と分散 $\mathbb{VAR}[T_1]$ を求めよ．

(2) T_2 の期待値 $\mathbb{E}[T_2]$ と分散 $\mathbb{VAR}[T_2]$ を求めよ．

(3) T_1, T_2 の同時確率密度関数を求めよ．

(4) T_1 の確率密度関数を求めよ．

$\boxed{\text{問題 58}}$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}_n^2 = \frac{1}{2n^2}\sum_{i=}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i - X_j)^2$$

を示せ．ただし，$\bar{X}_n = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$ である．

$\boxed{\text{問題 59}}$ 以下を示せ．

(1) Z が標準正規分布に従うとき，$X = Z^2$ は自由度 1 のカイ自乗分布に従う．

(2) W が母数 r, λ のガンマ分布に従うとは W が確率密度関数

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda w)^{r-1}e^{-\lambda w} & w > 0, \\ 0 & ((\text{その他}) \end{cases}$$

を持つときをいう．ただし，$r > 0, \lambda > 0$ である．W の積率母関数は

$$M_W(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r, \qquad t < \lambda$$

となることを示せ．

(3) X が自由度 p のカイ自乗分布に従うとき，X の積率母関数は

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^p, \qquad t < \frac{1}{2}$$

となることを示せ．

(4) X_1 と X_2 は互いに独立とし，各 X_i, $i = 1, 2$ は自由度 p_i カイ自乗分布に従うとき，$X_1 + X_2$ は自由度 $p_1 + p_2$ のカイ自乗分布に従うことを示せ．

$\boxed{\text{問題 60}}$ X と Y は独立にそれぞれ正規分布 $N(\mu, \sigma_X^2)$ と $N(\mu, \sigma_Y^2)$ に従うとき，

$$\mathbb{COV}\left[\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}X+\frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}Y,\, X-Y\right]=0$$

を示せ．

$\boxed{\text{問題 61}}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は正規分布 $N(\mu, 1)$ からの標本の大きさ n のランダム標本とする．ただし，$n \geq 2$ とする．統計量

$$S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2, \qquad \bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

を考える．

(1) $n \geq 3$ のとき，等式

$$(n-1)S_n^2=(n-2)S_{n-1}^2+\left(\frac{n-1}{n}\right)(X_n-\bar{X}_{n-1})^2$$

を示せ．$n=2$ のときは

$$S_2^2=\frac{1}{2}(X_2-X_1)^2$$

を示せ．

(2) X_1-X_2 の分布を求めよ．

(3) X_1+X_2 と X_1-X_2 は独立であることを示せ．

(4) S_2^2 は自由度 1 のカイ自乗分布に従うことを示せ．

(5) $n=k$ のとき，$(k-1)S_k^2$ は自由度 $k-1$ のカイ自乗分布に従い，S_k^2 と $\bar{X}_k$ は独立であると仮定したとき，以下を示せ．ただし，$k \geq 2$ である．

(5a) $X_{k+1}-\bar{X}_k$ の期待値 $\mathbb{E}[X_{k+1}-\bar{X}_k]$ と分散 $\mathbb{VAR}[X_{k+1}-\bar{X}_k]$ を求めよ．

(5b) $\sqrt{\frac{k}{k+1}}(X_{k+1}-\bar{X}_k)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うことを示せ．

(5c) $\frac{k}{k+1}(X_{k+1}-\bar{X}_k)^2$ は自由度 1 のカイ自乗分布に従うことを示せ．

(5d) $n=k+1$ のとき，

$$kS_{k+1}^2=(k-1)S_k^2+\left(\frac{k}{k+1}\right)(X_{k+1}-\bar{X}_k)^2$$

は自由度 k のカイ自乗分布に従うことを示せ．

(5e) X_{k+1} と $\bar{X}_k$ はそれぞれ独立で正規分布 $N(\mu, 1)$ と $N(\mu, 1/k)$ に従うことに注意して，

$$\mathbb{COV}[\frac{k}{k+1}\bar{X}_k+\frac{1}{k+1}X_{k+1},\, \bar{X}_k-X_{k+1}]=0$$

を示めせ．したがって，$\frac{k}{k+1}\bar{X}_k+\frac{1}{k+1}X_{k+1}$ と $\bar{X}_k-X_{k+1}$ は正規分布に従うので，$\frac{k}{k+1}\bar{X}_k+\frac{1}{k+1}X_{k+1}$ と $\bar{X}_k-X_{k+1}$ は独立となる．さらに，

$$\bar{X}_{k+1}=\frac{k}{k+1}\bar{X}_k+\frac{1}{k+1}X_{k+1}$$

から S_{k+1}^2 と $\bar{X}_{k+1}$ は独立であることがわかる．

$\boxed{\text{問題 62}}$ X_1, X_2, X_3, X_4 を確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{（その他の場合）} \end{cases}$$

からの標本の大きさが 4 のランダム標本とし，$X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, X_{(4)}$，をその順序統計量とする．

(1) $X_{(4)}$ の確率密度関数を求めよ．

(2) $X_{(1)}$ の確率密度関数を求めよ．

$\boxed{\text{問題 63}}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を確率密度関数 $f_X(x)$ からの標本の大きさが $n\,(n \geq 2)$ のランダム標本とし，$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ をその順序統計量とする．また，$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ とする．このとき，

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}, \qquad T = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}$$

としたとき，R と T の同時確率密度関数は

$$f_{R,T}(r,\,t) = \begin{cases} n(n-1)\left[F\left(t+\frac{r}{2}\right) - F\left(t-\frac{r}{2}\right)\right]^{n-2} f\left(t-\frac{r}{2}\right) f\left(t+\frac{r}{2}\right) & r > 0, \\ 0 & \text{（その他の場合）} \end{cases}$$

で与えられることを示せ．

$\boxed{\text{問題 64}}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を $(0,\,1)$ 上の一様分布[3] からの標本の大きさが $n\,(n \geq 2)$ のランダム標本とし，$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ をその順序統計量とする．さらに，

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}, \qquad T = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}$$

とする．

(1) R と T の同時確率密度関数は

$$f_{R,T}(r,\,t) = \begin{cases} n(n-1)r^{n-2} & 0 < r < 1,\ \frac{r}{2} < t < 1 - \frac{r}{2} \\ 0 & \text{（その他の場合）} \end{cases}$$

で与えれることを示せ．

(2) R の周辺確率密度関数は

$$f_R(r) = \begin{cases} n(n-1)r^{n-2}(1-r) & 0 < r < 1, \\ 0 & \text{（その他の場合）} \end{cases}$$

となることを示せ．さらに，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_R(r)\,dr = 1$$

を示せ．

[3] 確率密度関数は

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{（その他の場合）} \end{cases}$$

$\boxed{\text{問題 65}}$　$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を母数 $\lambda\,(\lambda > 0)$ の指数分布[4]からの標本の大きさが $n\,(n \geq 2)$ のランダム標本とし，$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ をその順序統計量とする．

(1) $X_{(1)}$ の確率密度関数を求めよ．

(2) $X_{(n)}$ の確率密度関数を求めよ．

(3) $X_{(1)}$ と $X_{(n)}$ の同時確率密度関数を求めよ．

(4) $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ と $T = (X_{(1)} + X_{(n)})/2$ の確率密度関数を求めよ．

(5) R の周辺確率密度関数を求めよ．

$\boxed{\text{問題 66}}$　$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とし，各 X_n は確率関数

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & (x = c + n), \\ 1 - \frac{1}{n} & (x = c), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を持つとする．ただし，c は定数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $X_n \xrightarrow{P} c$ を示せ．

(2) 期待値の定義に従い，$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$ を求め，$\mathbb{E}[X_n] \not\to c$ であることを確認せよ..

$\boxed{\text{問題 67}}$　確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ において，各 Y_n は母数 n のポアソン分布に従うとする．すなわち，

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n^k}{k!}e^{-n}, \qquad K = 0, 1, \ldots$$

である．

(1) $\mathbb{E}[X_1] = 1$ を示せ．ただし，$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ を用いてよい．

(2) $\mathbb{E}[X_1(X_1 - 1)] = 1$ を示せ．

(3) $\mathbb{VAR}[X_1] = \mathbb{E}[X_1^2] - \{\mathbb{E}[X_1]\}^2 = 1$ を示せ．

(4) Z_1 と Z_2 が独立に母数 1 のポアソン分布に従うとき，$Z_1 + Z_2$ は母数 2 のポアソン分布に従うことを示せ．

ヒント:$\mathbb{P}(Z_1 + Z_2 = k) = \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(Z_1 = \ell,\, Z_2 = k - \ell) = \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(Z_1 = \ell)\mathbb{P}(Z_2 = k - \ell)$ となることと二項定理 $2^k = \sum_{\ell=0}^{k} {}_kC_\ell$ を用いる．

(5) $X_n/n \xrightarrow{P} 1$ を大数の法則を用いて示せ．ヒント：$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ が独立に母数 1 のポアソン分布に従うとき，上の問いの結果から $Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ が母数 n のポアソン分布に従うことを利用する．

---

[4] 確率密度関数は

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0, \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

で与えられる．

(6) 中心極限定理を用いて,

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,\,1)$$

を示せ.

$\boxed{\text{問題 68}}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を平均 μ, 分散 σ^2 の分布からの標本の大きさが n のランダム標本とし,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{\ell=1}^{n}(X_\ell - \bar{X}_n)^2$$

とする. ただし, $\sigma > 0$ とする.

(1) 各 $X_\ell\,(\ell = 1, 2, \ldots, n)$ の分布が正規分布のとき,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$$

は $N(0,\,1)$ に従うことを示せ.

(2) 中心極限定理を用いて,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,\,1)$$

を示せ.

注意：各 $X_\ell\,(\ell = 1, 2, \ldots, n)$ の分布が必ずしも正規分布でなくともよい.

(3)

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{S_n^2}} \xrightarrow{d} N(0,\,1)$$

を示せ. ただし, $S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ は用いてよい.

$\boxed{\text{問題 69}}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を平均 μ, 分散 σ^2 の分布からの標本の大きさが n のランダム標本とし,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell,$$

とする. ただし, $\sigma > 0$ である.

(1) $\mathbb{E}[\bar{X}_n]$ と $\mathbb{VAR}[\bar{X}_n]$ を求めよ.

(2) つぎの不等式をみたすために, n をいくつ以上にすればよいかをチェビシェフの不等式を用いて調べよ.

$$(*) \qquad \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \le \frac{\sigma}{2}) \ge 0.99$$

ヒント：確率変数 Y の分散が存在（$\mathbb{VAR}[Y] = \tau^2\,(\tau > 0)$）するならば, 任意の正の数 a に対して、

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| < a\tau) \le \frac{1}{a^2}, \qquad \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| < a\tau) \ge 1 - \frac{1}{a^2},$$

(3) 不等式 $(*)$ みたすために，n をいくつ以上にすればよいかを中心極限定理を用いて調べよ．ただし，Z が標準正規分布に従うとき，$\mathbb{P}(|Z| \leq 2.575) = 0.99$ を用いてよい．また，自然数 a に対して，$[a]$ を a を超えない最大の整数とする．

$\boxed{\text{問題 70}}$　X_1, X_2 は正規分布 $N(0, 1)$ からの標本の大きさが 2 のランダム標本とする．

$$\begin{cases} S = X_1 + X_2 \\ R = X_1 - X_2 \end{cases}$$

としたとき，つぎの問いに答えよ．

(1) S と R の共分散 $\mathbb{COV}(S, R) = \mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])(R - \mathbb{E}[R])]$ を求めよ．

(2) (S, R) の同時確率密度関数を求めよ．

(3) R の確率密度関数を求めよ．

(4) S と R は独立かどうかを調べよ．

$\boxed{\text{問題 71}}$　確率変数 X を確率関数

$$f(x|\,\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|}(1-\theta)^{1-|x|}, \qquad x = -1, 0, 1$$

からの標本の大きさが 1 のランダム標本とする．ただし，$0 < \theta < 1$ とする．ふたつの統計量

$$S = S(X) = |X|, \qquad T = T(X) = \begin{cases} 2, & (X = 1) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を考える．

(1) S の確率分布および S が与えられたときの X の条件付確率分布を求め，S は θ の十分統計量かどうかを調べよ．

(2) S は θ の不偏推定量かどうかを調べよ．

(3) T は θ の不偏推定量かどうかを調べよ．

(4) S と T の MSE（平均 2 乗誤差）を比較せよ．(横軸を θ とし，縦軸を MSE の値として，S と T の MSE をグラフに描き比較すること)

$\boxed{\text{問題 72}}$　$X_1, X_2, \ldots,, X_m$ を正規分布 $N(\theta, \sigma^2)$ からの標本の大きさが m のランダム標本とし，$Y_1, Y_2, \ldots,, Y_m$ を正規分布 $N(\theta, \tau^2)$ からの標本の大きさが n のランダム標本とする．ここで，$X_1, X_2, \ldots,, X_m$ と $Y_1, Y_2, \ldots,, Y_m$ は互いに独立する．また，σ^2 と τ^2 は既知とする．定数 $a\,(0 \leq a \leq 1)$ に対して，

$$\widehat{\theta}_a = a\bar{X}_m + (1-a)\bar{Y}_n,$$

とする．ただし，$\bar{X}_m = (1/m)\sum_{i=1}^m X_i$ と $\bar{Y}_n = (1/n)\sum_{i=1}^n Y_i$ である．

(1) $\widehat{\theta}_a$ は θ の不偏推定量であることを示せ．

(2) $\widehat{\theta}_a$ の MSE を求め，$\widehat{\theta}_a$ の MSE を最小にする a は

$$a = \frac{\tau^2}{n} \Bigg/ \left(\frac{\sigma^2}{m} + \frac{\tau^2}{n} \right)$$

となることを示せ．

$\boxed{\text{問題 73}}$ $X_1, X_2, \ldots, X_m$ と $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ をそれぞれ平均 μ_1，分散 σ^2 の正規分布と平均 μ_2，分散 σ^2 の正規分布からのランダム標本とする．ここで，$X_1, X_2, \ldots, X_m$ と $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ は独立であるとする．

(1) μ_1, μ_2, σ^2 の対数尤度関数から μ_1, μ_2, σ^2 の最尤推定量は以下で与えられることを示せ．

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X}, \quad \hat{\mu}_2 = \bar{Y}, \quad \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{m+n}\{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2\}.$$

(2) 最尤推定量のバイアスを求めよ．さらに，σ^2 の推定量

$$c\{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2\}.$$

が不偏推定になるように定数 c を定めよ．

$\boxed{\text{問題 74}}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を確率密度関数

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sigma}\exp\{-(x-\mu)/\sigma\} I_{(\mu,\infty)}(x)$$

をもつ分布からのランダム標本とする．ただし，$-\infty < \mu < \infty$，$\sigma > 0$ である．

(1) $\mathbb{E}(X - \mu)$ と $\mathbb{VAR}(X)$ を求めよ．

(2) μ は既知として，σ^2 の最尤推定量が $(\bar{X} - \mu)^2$ で与えられることを示せ．ただし，$\bar{X} = \sum X_i / n$ である．

(3) 最尤推定量 $(\bar{X} - \mu)^2$ のバイアスを計算せよ．（ヒント：$\sum(X_i - \mu)$ は母数 n, σ^{-1} のガンマ分布に従うことに注意せよ．）

(4)

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

は σ^2 の不偏推定量になることを示せ．

(5) μ は既知とし，$\mathbb{P}[X_1 > t](t > \mu)$ の最尤推定量を求めよ．（ヒント：確率を σ と t で表現し，それが σ の 1 対 1 の関数になっていることを利用せよ．）

$\boxed{\text{問題 75}}$ 確率変数 X は次のような確率関数 $f(x|\,\theta)$ を持つとする．

X	-2	-1	0	1	2	計
$f(x\|\,\theta)$	$\frac{\theta}{6}$	$\frac{\theta}{3}$	$1-\theta$	$\frac{\theta}{3}$	$\frac{\theta}{6}$	1

ただし，$0<\theta<1$ である．統計量

$$S = S(X) = |X|, \qquad T = T(X) = \frac{3}{4}S$$

を考える．

(1) S の確率分布を求めよ．

(2) S の確率分布および S が与えられたときの X の条件付確率分布を求め，S は θ の十分統計量かどうかを調べよ．

(3) θ の推定量 T の $\mathrm{MSE}(T,\theta)$（平均 2 乗誤差）を求めよ．(横軸を θ とし，縦軸を $\mathrm{MSE}(T,\theta)$ の値として，$\mathrm{MSE}(T,\theta)$ のグラフに描くこと)

$\boxed{\text{問題 76}}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は確率密度関数

$$f(x|\,\theta) = \theta x^{\theta-1}, \qquad 0<x<1, \qquad 0<\theta<\infty \tag{7}$$

からの大きさ n のランダム標本とする．

(1) $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ を観測したのときの尤度関数を述べよ．

(2) θ の最尤推定量を求めよ．さらに，$\tau = \theta^{-1}$ の最尤推定量は

$$\widehat{\tau}_n = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i$$

で与えられることを示せ．

(3) 確率変数 X が確率密度関数 (7) を持つ分布に従うとき，X と $T=-\theta\log X$ の分布関数を求めよ．さらに，T の積率母関数 $M_T(r)$ を求めよ．

(4) $\widehat{\tau}_n$ は τ の不偏推定量であることを示した上でその分散を求めよ．

(5) $\widehat{\tau}_n$ は τ の一様最小分散不偏推定量であることを示せ．

(6) ピポット $-\theta\sum_{i=1}^{n}\log X_i$ を利用して，信頼係数 $\alpha\times 100\%$ の θ の信頼区間を構成せよ．ただし，$0<\alpha<1$ である．

$\boxed{\text{ヒント}}$

- 適当な正則条件のもとで $g(\theta)$ の不偏推定量 U (標本の大きさが n のランダム標本に基づく推定量) の分散の下限が

$$\mathbb{VAR}_\theta[U] \ge \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial\theta}(\theta)\right)^2}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X_1|\,\theta)\right)^2\right]}$$

で与えられる．

- 母数 $(n,\, 1)$ のガンマ分布の確率密度関数と積率母関数は

$$f(x|\, n,\, 1) = \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} I_{(0,\infty)}(x) \qquad \text{と} \quad M_X(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^n, \qquad (r < 1)$$

  で与えられる．

- $u_{\alpha/2}$ と $l_{\alpha/2}$ を母数 $(n,\, 1)$ のガンマ分布の上側 $(\alpha/2)\times 100\%$ 点と上側 $(1-\alpha/2)\times 100\%$ とする．すなわち，

$$\int_{u_{\alpha/2}}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x}\, dx = \frac{\alpha}{2}, \quad \text{と} \quad \int_0^{l_{\alpha/2}} \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x}\, dx = \frac{\alpha}{2}$$

  とする．

問題 77　$X_1,\, X_2,\, \ldots\,,\, X_n (n \geq 2)$ をポアソン分布

$$f_X(x|\, \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,, \quad \lambda > 0$$

からの大きさ n のランダム標本とする．

(1) $\bar{X}_n = (1/n)\sum_{i=1}^n X_i$ としたとき，$\bar{X}_n$ は λ の不偏推定量であることを示せ.（ヒント：$\mathbb{E}[X_1] = \lambda$ ）

(2) $\bar{X}_n$ の分散を求めよ.（ヒント：$\mathbb{E}[X_1(X_1 - 1)] = \lambda^2$ ）

(3) $\mathbb{E}[\{(\partial/\partial\lambda)\log f_X(x|\, \lambda)\}^2]$ を求め，λ の不偏推定量の分散の下限を求めよ.（ヒント：クラメール・ラオの下限は $1/(n\mathbb{E}[\{(\partial/\partial\lambda)\log f_X(x|\, \lambda)\}^2])$ である．）

(4) λ の一様最小分散不偏推定量を求めよ．

問題 78　$X_1,\, X_2,\, \ldots\,,\, X_n (n \geq 2)$ を確率密度関数

$$f_X(x|\, \mu) = e^{-(x-\mu)} I_{[\mu,\infty)}(x) \qquad \mu > 0$$

からの大きさ n のランダム標本とする．ただし，$I_A(x)$ は指示関数とする．すなわち，集合 A に対し，$x \in A$ ならば，$I_A(x) = 1$，$x \notin A$ ならば，$I_A(x) = 0$ である．

(1) X_1 の累積分布関数を求めよ．

(2) $Y = \min\{X_1,\, X_2,\, \ldots\,,\, X_n\}$ としたとき，Y の確率密度関数は

$$f_Y(y|\, \mu) = ne^{-n(y-\mu)} I_{[\mu,\infty)}(y)$$

で与えられることを示せ．

(3) 信頼係数 $100p\%\,(0 < p < 1)$ の μ の信頼区間を構成せよ．ただし

$$\mathbb{P}_\mu(Y - \mu \leq a) = \frac{1-p}{2}, \qquad \mathbb{P}_\mu(Y - \mu \geq b) = \frac{1-p}{2}$$

をみたす点 $a,\, b\,(a < b)$ を利用する．

$\boxed{\text{問題 79}}$　$X_1, X_2, \ldots, X_n\,(n \geq 2)$ を $(0, \theta)$ 上の一様分布からのランダム標本とする．ただし，$\theta > 0$ である．また，$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の順序統計量とし，r を $1 \leq r \leq n-1$ なる任意の自然数とする．このとき，$X_{(r)}/\theta$ をピボットとして，信頼係数 $100p\%\,(0 < p < 1)$ の θ の信頼区間を構成せよ．

ヒント１：$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\,(n \geq 2)$ は独立同一分布に従い，連続な分布関数 $F_Y(y)$（確率密度関数を $f_Y(y)$ とする）を持つとき，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ の r 番目の順序統計量 $Y_{(r)}$ の確率密度関数は

$$f_Y(y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f_Y(y)[F_Y(y)]^{r-1}[1 - F_Y(y)]^{n-r}$$

となる．

ヒント２：確率変数 Z はパラメータ (α, β) のベータ分布に従うとする：すなわち，Z の確率密度関数は

$$f_Z(z) = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} I_{(0,\,1)}(x)$$

である．ただし，$\alpha > 0, \beta > 0$ である．このとき，$q\,(0 < q < 1)$ に対して，$u_q(\alpha, \beta)$ と $l_q(\alpha, \beta)$ を

$$\int_{u_q(\alpha,\,\beta)}^{1} f_Z(z)\,dz = q, \qquad \int_{0}^{l_q(\alpha,\,\beta)} f_Z(z)\,dz = q$$

をみたすものとする．

$\boxed{\text{問題 80}}$　X を確率密度関数 $f(x|\theta), \theta \in \{0, 1\}$, からの大きさ 1 のランダム標本とする．ただし，$f(x|\theta)$ は

x	1	2	3	4	合計
$f(x\|0)$	0.01	0.01	0.01	0.97	1
$f(x\|1)$	0.06	0.05	0.04	0.85	1

である．このとき，検定問題 $H_0: \theta = 0$, v.s. $H_1: \theta = 1$ を考える．

(1)　有意水準 0.02 の非確率化検定関数をすべて求めよ．

(2) 上の問題で求めた検定関数の第二種の誤りの確率を求め，そのうちで最も望ましい検定関数を指定せよ．

$\boxed{\text{問題 81}}$　X_1, X_2 をポアソン分布

$$f_X(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \lambda > 0$$

からの大きさ 2 のランダム標本とする．ただし，$\lambda > 0$ である．このとき，検定問題 $H_0: \lambda \leq 1$, v.s. $H_1: \lambda > 1$ を考える．

(1)　検定関数

$$\psi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1 \geq 2) \\ 0, & (x_1 < 2) \end{cases}$$

および

$$\psi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1 + x_2 > 3) \\ 0.65, & (x_1 + x_2 = 3) \\ 0, & (x_1 + x_2 < 3) \end{cases}$$

の検出力関数を求めよ．

(2)　検定関数 $\psi_1(x_1, x_2)$ と $\psi_2(x_1, x_2)$ のサイズを求めよ．

$\boxed{\text{問題 82}}$　表の出る確率が $\theta(0 < \theta < 1)$ なるコインを投げる実験を考える．帰無仮説 $H_0 : \theta = 1/2$，対立仮説 $H_1 : \theta = 3/4$ の検定を考える．そのためにコインを繰り返し投げたときに何回に初めて表がでるかを観測する実験を二人の人が行なうことにする． X_1 と X_2 をそれぞれの人が行う実験の結果に対応させる．したがって，X_1 と X_2 は独立に

$$P(X_1 = n) = \theta(1-\theta)^{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

なる確率分布に従う．

(1)　棄却域

$$G = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 2 \le n_1 + n_2 \le 3\}$$

であたえられた検定のサイズをもとめよ．

(2)　(1) において棄却域があたえられた検定の検出力を求めよ．