2007 年 11 月 27 日（今野）

11 月 20 日出題のレポートのコメント (情報統計学)

$\boxed{\text{問題 56 について}}$ (1) テキスト page 50 の系 4.1 を利用する．(2) $\sum_{i=1}^n \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n}$ になることに注意せよ．(3) $\mathbb{VAR}[T] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbb{VAR}[X_i] = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2$ と (2) を利用すること．

$\boxed{\text{問題 59 について}}$ (1)「統計解析」のテキスト page 15 の例 1.10[1]を参照.

(2) 積率母関数の定義から

$$\begin{aligned} M_W(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{wt} f_W(w)\,dw \\ &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} w^{r-1} e^{-(\lambda-t)w}\,dw \end{aligned}$$

ここで，$t < \lambda$ とし，$u = (\lambda - t)w$ とおけば，

$$\int_0^{\infty} w^{r-1} e^{-(\lambda-t)w}\,dw = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\lambda - t}\right)^{r-1} e^{-u} \frac{du}{\lambda - t} = \left(\frac{1}{\lambda - t}\right)^r \int_0^{\infty} u^{r-1} e^{-u}\,du.$$

あとは，ガンマ関数の定義を使えばよい．

(3) $\lambda = 1/2$ とおくだけ.

(4) $X_1$ と $X_2$ が独立のとき，$X_1 + X_2$ の積率母関数は，

$$\begin{aligned} M_{X_1+X_2}(t) &= \mathbb{E}[e^{t(X_1+X_2)}] = \mathbb{E}[e^{tX_1} e^{tX_2}] = \mathbb{E}[e^{tX_1}]\mathbb{E}[e^{tX_2}] \qquad (X_1 \text{ と } X_2 \text{ は独立より}) \\ &= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \qquad (1) \end{aligned}$$

となる．しかし，問題の仮定から

$$M_{X_1}(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{p_1}, \qquad M_{X_2}(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{p_2}$$

となる．これらを (1) に代入すると

$$M_{X_1+X_2}(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{p_1+p_2}$$

は自由度 $p_1 + p_2$ のカイ自乗分布の積率母関数になるので，$X_1 + X_2$ は $p_1 + p_2$ のカイ自乗分布に従うことがわかる．

$\boxed{\text{問題 62 について}}$ 分布関数は

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ x^2 & (0 < x < 1) \\ 1 & (x \ge 1) \end{cases}$$

となることに注意して，テキスト page 66 の命題 4.7 を用いるか

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x) &= \mathbb{P}(X_{(1)} \le x) = \mathbb{P}(X_1 \le x, X_2 \le x, X_3 \le x, X_4 \le x) = \Pi_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \le x) \\ F_{X_{(4)}}(x) &= \mathbb{P}(X_{(4)} \le x) = 1 - \mathbb{P}(X_{(4)} > x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x, X_4 > x) \\ &= 1 - \Pi_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > x) \end{aligned}$$

を利用する．

[1] http://mp-w3math.jwu.ac.jp/ konno/pdf/statg-1-7r.pdf

$\boxed{\text{問題 67 について}}$ (1) 期待値の定義に従うと

$$\mathbb{E}[X_1] = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{1}{k!}e^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{e^{-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-1}}{(k-1)!} = 1.$$

(2) 期待値の定義に従うと

$$\mathbb{E}[X_1(X_1-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,\mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,\frac{1}{k!}e^{-1} = \sum_{k=2}^{\infty} k\,\frac{e^{-1}}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-1}}{(k-2)!} = 1.$$

(3) 期待値の性質から $1 = \mathbb{E}[X_1(X_1-1)] = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]$ となるので，$\mathbb{E}[X_1^2] = 2$ となることに注意せよ．
(4) ヒントを利用せよ．
(5) $X_n$ と $Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ は同じ分布になるので，

$$\frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) \xrightarrow{P} 1$$

を示せばよい．これは，$\mathbb{E}[Z_1] = 1$ と大数の法則よりわかる．
(6)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \le x\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n - n}{\sqrt{n}} \le x\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i - 1}{\sqrt{n}} \le x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathbb{VAR}[Z_i]}\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \mathbb{E}[Z_i]) \le x\right)\end{aligned}$$

となることに注意して，中心極限定理（定理 4.2）を利用する．

$\boxed{\text{問題 71 について}}$ (1) $S$ の分布を求める：$S$ の取りうる値は $0, 1$ であることに注意して，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S=0) &= \mathbb{P}(X=0) = 1-\theta, \\ \mathbb{P}(S=1) &= \mathbb{P}(X=1 \text{ or } X=-1) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=-1) = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

より

$$f_S(s) = \begin{cases} 1-\theta & (s=0) \\ \theta & (s=1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2}$$

したがって，$S=0$ が与えられたときの $X$ の条件付確率は

$$\mathbb{P}(X=x|\,S=0) = \frac{\mathbb{P}(X=x,\, S=0)}{\mathbb{P}(S=0)} = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

と

$$\mathbb{P}(X=x|\,S=1) = \frac{\mathbb{P}(X=x,\, S=1)}{\mathbb{P}(S=1)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x=-1,\,1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となることから $S$ は $\theta$ の十分統計量であることがわかる．
(2) $S$ の確率関数 (2) から

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{s=0,\,1} s \times f_S(s) = 0 \times (1-\theta) + 1 \times \theta$$

または，

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{x=-1,\,0,\,1} S(x) f_X(x) = S(-1) \times \frac{\theta}{2} + S(0)(1-\theta) + S(1) + 1 \times \frac{\theta}{2}$$

(3)

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{x=-1,\,0,\,1} T(x) f_X(x) = T(-1) \times \frac{\theta}{2} + T(0)(1-\theta) + T(1) \times \frac{\theta}{2} = \theta.$$