2007 年 12 月 11 日（今野）

12 月 04 日出題のレポートのコメント (情報統計学)

$\boxed{\text{問題 57 について}}$ X_1 は (0, 2) 上の一様分布であるので，X_1 の確率密度関数は，

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (0 < x < 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となることに注意せよ．したがって，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx := \mu \\ \mathbb{VAR}[X_1] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx - \mu^2 \end{aligned}$$

となる．

(1) と (2): 上記の結果と

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[a_1 W_1 + a_2 W_2] &= a_1 \mathbb{E}[W_1] + a_2 \mathbb{E}[W_2] \\ \mathbb{VAR}[a_1 W_1 + a_2 W_2] &= a_1^2 \mathbb{VAR}[W_1] + a_2^2 \mathbb{VAR}[W_2] \end{aligned}$$

を利用する．ただし，W_1, W_2 は分散が有限な独立な確率変数で，a_1, a_2 は定数．

$\mathbb{VAR}[X_1 - X_2]$ の計算については注意すること！

(3) X_1, X_2 の同時確率密度関数は，

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & (0 < x_1,\, x_2 < 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になることに注意する．また，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$$

になることにも注意せよ．

さらに，

$$x_1 = \frac{t_1 + t_2}{2}, \qquad x_2 = \frac{t_1 - t_2}{2}$$

と

$$0 < x_1,\, x_2 < 2 \Longleftrightarrow 0 < \frac{t_1 + t_2}{2} < 2,\, 0 < \frac{t_1 - t_2}{2} < 2$$

となることに注意する．さらに，

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

したがって，

$$\begin{aligned} f_{T_1, T_2}(t_1, t_2) &= f_{X_1, X_2}\left(\frac{t_1 + t_2}{2}, \frac{t_1 - t_2}{2}\right) |J| \\ &= \begin{cases} \frac{1}{8} & 0 < t_1 < 2,\, -t_1 < t_2 < t_2 \\ \frac{1}{8} & 2 \leq t_1 < 4,\, 4 - t_1 < t_2 < -4 + t_1 \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} D &= \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2;\, 0 < \frac{t_1 + t_2}{2} < 2,\, 0 < \frac{t_1 - t_2}{2} < 2\} \\ &= \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2;\, 0 < t_1 < 2,\, -t_1 < t_2 < t_2\} \cup \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2;\, 0 < t_1 < 2,\, -t_1 < t_2 < t_2\} \end{aligned}$$

から，

$$f_{T_1}(t_1) = \begin{cases} \int_{-t_1}^{t_1} f_{T_1,\,T_2}(t_1,\,t_2)\,dt_2 & (0 < t_1 < 2) \\ \int_{4-t_1}^{-4+t_1} f_{T_1,\,T_2}(t_1,\,t_2)\,dt_2 & (2 \leq t_1 < 4) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．さらに，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{T_1}(t_1)\,dt_1 = 1$$

となることも確認せよ．

問題 63 について　まず，系 4.3(page 67) より

$$f_{X_{(1)},\,X_{(n)}}(x_1,\,x_n) = \begin{cases} n(n-1)[F_X(x_n) - F_X(x_1)]^{n-2} f_X(x_1) f(x_n) & x_1 < x_n, \\ 0 & x_1 \geq x_n \end{cases}$$

に注意する．さらに，

$$x_{(n)} = t + \frac{r}{2}, \qquad x_{(1)} = t - \frac{r}{2}$$

より

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial x_{(1)}}{\partial r} \\ \frac{\partial x_{(n)}}{\partial t} & \frac{\partial x_{(n)}}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$$

より，

$$f_{R,\,T}(r,\,t) = f_{X_{(1)},\,X_{(n)}}\left(t + \frac{r}{2},\,t - \frac{r}{2}\right)|J|$$

に注意すればよい．

問題 74 について　(1)

$$\mathbb{E}[X-\mu] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)f(x;\,\theta)\,dx = \int_{\mu}^{\infty}(x-\mu)\frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}dx$$

ここで，

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

とおけば，

$$\mathbb{E}[X-\mu] = \sigma\int_0^{\infty} te^{-t}\,dt = \sigma$$

また，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X-\mu)^2] &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x;\,\theta)\,dx = \int_{\mu}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}dx \\ &= \sigma\int_0^{\infty} t^2 e^{-t}\,dt = 2\sigma^2 \end{aligned}$$

となる．したがって，$\mathbb{E}[X] = \mu + \sigma$ に注意して，

$$\begin{aligned} \mathbb{VAR}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[(X-\mu-\sigma)^2] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2 - 2\sigma(X-\mu) + \sigma^2] \\ &= \mathbb{E}[(X-\mu)^2] - 2\sigma\mathbb{E}[X-\mu] + \sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

となる．
(2) μ が既知であるので，$X_i = x_i\,(i = 1,\,2,\,ldots,\,n)$ が与えられたとき，

$$L(\sigma;\,x_1,\,\ldots,\,x_n) = \Pi_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right\} = \frac{1}{\sigma^n}\exp\left\{-\frac{n(\bar{x}_n-\mu)}{\sigma}\right\}$$

ただし，$\bar{x}_n = (1/n)\sum_{i=1}^n x_i$ である．これより，対数尤度は，

$$\ell(\sigma) = \log L(\sigma;\, x_1,\, \ldots,\, x_n) = -n \log \sigma - \frac{n(\bar{x}_n - \mu)}{\sigma}$$

よって，尤度方程式は，

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{n(\bar{x}_n - \mu)}{\sigma^2} = 0$$

から $\sigma = \bar{x}_n - \mu$ となり，σ の最尤推定量は $\bar{X}_n - \mu$ となる．さらに，$\sigma > 0$ と σ^2 は一対一対応となるので，定理 6.2(page 92) から σ^2 の最尤推定量は $(\bar{X}_n - \mu)^2$ となる．

(4)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2\right] &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[(X_i - \mathbb{E}[X_i] + \mathbb{E}[X_1] - \bar{X}_n)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2 + (\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1])^2 - 2(X_i - \mathbb{E}[X_i])(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1])\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\Bigg(n\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2] + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1])^2] \\
&\qquad -2\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1])]\Bigg) \\
&= \frac{1}{n-1}\Bigg(n\mathbb{VAR}[X_1] + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1])^2] \\
&\qquad -2\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1])]\Bigg)
\end{aligned}$$

しかし，$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mathbb{E}[X_1]$ から

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1])] &= n\mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n])^2 = n\mathbb{VAR}[\bar{X}_n] = n \times \frac{\mathbb{VAR}[X_1]}{n} = \mathbb{VAR}[X_1], \\
\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1])^2] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n])^2 = n\mathbb{VAR}[\bar{X}_n] = n \times \frac{\mathbb{VAR}[X_1]}{n} = \mathbb{VAR}[X_1]
\end{aligned}$$

である．

(5) $t > \mu$ に対して，

$$\mathbb{P}[X_1 > t] = \int_t^\infty \frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\, dx = \left[-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]_{x=t}^\infty = \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

あとは，$\sigma > 0$ と $\mathbb{P}[X_1 > t] = \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$ は一対一であり，μ が既知のとき，σ の最尤推定量は $\bar{X}_n - \mu$ であるので，定理 6.2(page 92) から $\mathbb{P}[X_1 > t]$ の最尤推定量は

$$\frac{t-\mu}{\bar{X}_n - \mu}$$

となる．