

小テスト (情報統計学: 15 分)

問題 1 X_1 と X_2 は独立な確率変数でそれぞれの分散は σ_1^2 と σ_2^2 とする。このとき、以下の等式を示せ。

(1) $\text{VAR}[X_1] = \mathbb{E}[X_1^2] - \{\mathbb{E}[X_1]\}^2$.

(2) $\text{VAR}[X_1 + X_2] = \text{VAR}[X_1] + \text{VAR}[X_2]$.

ヒント 以下は証明なしで用いてよい:

- 期待値が存在する確率変数 Z, W に対して, $\mathbb{E}[Z + W] = \mathbb{E}[Z] + \mathbb{E}[W]$.
- Z と W が独立のとき, $\mathbb{E}[ZW] = \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[W]$. ただし, 期待値は存在するものとする.
- $\mathbb{E}[W^2] < \infty$ のとき, $\text{VAR}[W]$ と $\mathbb{E}[W]$ は存在し, $\text{VAR}[W] = \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^2]$.

問題 2 確率関数

$$f(x|\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|}, \quad x = -1, 0, 1$$

をもつ母集団からの標本の大きさが 1 のランダム標本を X とする。ただし, $0 < \theta < 1$ とする。ふたつの統計量

$$S = S(X) = |X|, \quad T = T(X) = \begin{cases} 2, & (X = -1) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を考える。

- (1) S の確率関数 $f_S(s) = \mathbb{P}(S = s)$ を求めよ。
- (2) S の期待値 $\mathbb{E}[S]$ を求めよ。
- (3) T の期待値 $\mathbb{E}[T]$ を求めよ。