今野　(2008 年 1 月 15 日)

情報統計学の試験問題（試験時間は 40 分）

解答上の注意

特別な指示がある場合を除き，答えが合っているかどうかよりも解答の途中過程の論理的展開を重視して採点をします．以下の点に留意して解答を作成すること．

(1) 解答の途中過程は丁寧に記述すること．

(2) 講義で述べたことは設問中で証明することを求めていない場合には証明なしに用いてよい．しかし，なにをどのように用いたかを可能な限り明示すること．

(3) 各自が理解していることを採点者にわかるように解答を作成することを心がけること．

(4) 等号の使い方に注意すること．

(5) どの問題を解答しているかが明示されていれば，解答は問題番号順でなくともよい．

答案の返却の日時は掲示する．

問題 1　離散型確率変数 X と Y の同時確率関数を $f_{X,Y}(x, y)$ とする．ただし，X の取りうる値の集合は $S_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$，$Y$ の取りうる値の集合は $S_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_\ell\}$ で，k, ℓ は自然数である．さらに，X と Y の周辺確率関数を

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \begin{cases} \sum_{j=1}^{\ell} f_{X,Y}(x_i, y_j) & (x = x_i,\, i = 1, 2, \ldots, k), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \\ f_Y(y) &= \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} f_{X,Y}(x_i, y_j) & (y = y_j,\, j = 1, 2, \ldots, \ell), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

で定義する．$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の実数値関数 g に対して，$g(X, Y)$ の期待値を

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} g(x_i, y_j) f_{X,Y}(x_i, y_j) \tag{$\heartsuit$}$$

で定義する．同時確率関数 $f_{X,Y}$ の性質から

$$\sum_{i=1}^{k} f_X(x_i) = 1, \qquad \sum_{j=1}^{\ell} f_Y(y_j) = 1$$

となる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a, b を定数とする．式 ($\heartsuit$) において，$g(x, y) = ax + by$ とおくことにより，

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a \times \mathbb{E}[X] + b \times \mathbb{E}[Y]$$

となることを示せ．ただし，$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i f_X(x_i)$ と $\mathbb{E}[Y] = \sum_{j=1}^{\ell} y_j f_Y(y_j)$ である．

(2) すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ とする．このとき，式 ($\heartsuit$) において，$g(x, y) = xy$ とおくことにより，

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[Y]$$

を示せ．ただし，$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i f_X(x_i)$ と $\mathbb{E}[Y] = \sum_{j=1}^{\ell} y_j f_Y(y_j)$ である．

解答と配点　(1) 10 (2) 10 計 20

(1) 式 ($\heartsuit$) に $g(x, y) = ax + by$ を代入し，分配法則を使い，和の記号の順番を交換し，X と Y の周辺確率関数の

定義式から

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[aX+bY] &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} g(x_i,\, y_j) f_{X,\,Y}(x_i,\, y_j) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} (ax_i + by_j)\, f_{X,\,Y}(x_i,\, y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} ax_i\, f_{X,\,Y}(x_i,\, y_j) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} by_j\, f_{X,\,Y}(x_i,\, y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left\{ ax_i \left(\sum_{j=1}^{\ell} f_{X,\,Y}(x_i,\, y_j) \right) \right\} + \sum_{j=1}^{\ell} \left\{ by_j \left(\sum_{i=1}^{k} f_{X,\,Y}(x_i,\, y_j) \right) \right\} \\
&= a \sum_{i=1}^{k} x_i f_X(x_i) + b \sum_{j=1}^{\ell} y_j f_Y(y_j) = a\, \mathbb{E}[X] + b\, \mathbb{E}[Y]
\end{aligned}
$$

となる．

(2) 式 $(\heartsuit)$ に $g(x,\, y) = xy$ を代入し，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} x_i y_j f_{X,\,Y}(x_i,\, y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} x_i y_j f_X(x_i) f_Y(y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i f_X(x_i) \sum_{j=1}^{\ell} y_j f_Y(y_j) = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]
\end{aligned}
$$

問題 2　確率関数

$$
f(x|\,\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|}, \qquad x = -1,\, 0,\, 1
$$

をもつ母集団からの標本の大きさが 1 のランダム標本を X とする．ただし，$0 < \theta < 1$ とする．統計量

$$
S = S(X) = |X|
$$

を考える．

(1) S の期待値 $\mathbb{E}[S]$ を求めよ．

(2) S の平均自乗誤差 $MSE_S(\theta) = \mathbb{E}[(S-\theta)^2]$ を求め，そのグラフを描け．ただし，横軸は θ で縦軸は MSE である．

解答と配点　(a) 10 (b) 10 計 20

(1)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= \sum_{x=-1,\,0,\,1} S(x) f(x|\,\theta) = S(-1) \times \frac{\theta}{2} + S(0)(1-\theta) + S(1) + \times \frac{\theta}{2} \\
&= |-1| \times \frac{\theta}{2} + |0|(1-\theta) + S(1) + |1| \times \frac{\theta}{2} = \theta
\end{aligned}
$$

(2) $0 < \theta < 1$ に対して，

$$
\begin{aligned}
MSE_S(\theta) &= \mathbb{E}[(S-\theta)^2] = \sum_{x=-1,\,0,\,1} (S(x)-\theta)^2 f(x|\,\theta) = \sum_{x=-1,\,0,\,1} (|x|-\theta)^2 f(x|\,\theta) \\
&= (|-1|-\theta)^2 f(-1|\,\theta) + (|0|-\theta)^2 f(0|\,\theta) + (1-\theta)^2 f(1|\,\theta) \\
&= (|-1|-\theta)^2 \frac{\theta}{2} + (|0|-\theta)^2 (1-\theta) + (|1|-\theta)^2 \frac{\theta}{2} = \theta(1-\theta)
\end{aligned}
$$

グラフは $g(\theta) = \theta(1-\theta) = -(\theta - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}\ (0 < \theta < 1)$ の 2 次関数．

$\boxed{\text{問題 3}}$ X_1, X_2 は平均 $\mu\,(-\infty < \mu < \infty)$, 分散 $\sigma^2\,(0 < \sigma < \infty)$ を持つ分布からの標本の大きさが 2 のランダム標本とし，

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$$

とする．すなわち，X_1, X_2 は互いに独立で，$\mathbb{E}[X_i] = \mu$, $\mathbb{VAR}[X_i] = \sigma^2\,(i = 1, 2)$ である．
(1) $\bar{X}_2$ の平均 $\mathbb{E}[\bar{X}_2]$ を求めよ．
(2) $\bar{X}_2$ の分散 $\mathbb{VAR}[\bar{X}_2]$ を求めよ．

$\boxed{\text{ヒント}}$ 以下は証明なしで用いてよい：

- 期待値が存在する確率変数 Z, W に対して，$\mathbb{E}[Z + W] = \mathbb{E}[Z] + \mathbb{E}[W]$.
- Z と W が独立のとき，$\mathbb{E}[ZW] = \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[W]$. ただし，期待値は存在するものとする．
- $\mathbb{VAR}[W] = \mathbb{E}[(W - \mathbb{E}[W])^2]$.
- a を定数としたとき，$\mathbb{VAR}[aW] = a^2\mathbb{VAR}[W]$.

$\boxed{\text{解答と配点}}$ (1) 10 (2) 10 計 20
(1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\bar{X}_2] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X_1 + X_2\right] \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]\Big) = \frac{1}{2}2 \times \mu = \mu
\end{aligned}$$

(2) $\mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])(X_2 - \mathbb{E}[X_2])] = \mathbb{E}[X_1 - \mathbb{E}[X_1]]\mathbb{E}[X_2 - \mathbb{E}[X_2]] = 0$ に注意して，

$$\begin{aligned}
\mathbb{VAR}[\bar{X}_2] &= \mathbb{VAR}\left[\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}(X_1 + X_2) - \mathbb{E}\big[\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\big]\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}(X_1 + X_2) - \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]\big)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2^2}\Big((X_1 - \mathbb{E}[X_1]) + (X_2 - \mathbb{E}[X_2])\Big)^2\right] \\
&= \frac{1}{2^2}\mathbb{E}\Big[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2 + (X_2 - \mathbb{E}[X_2])^2 + 2(X_1 - \mathbb{E}[X_1])(X_2 - \mathbb{E}[X_2])\Big] \\
&= \frac{1}{2^2}\Big(\mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2] + \mathbb{E}[+(X_2 - \mathbb{E}[X_2])^2] + \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])(X_2 - \mathbb{E}[X_2])]\Big) \\
&= \frac{1}{2^2}\Big(\mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2] + \mathbb{E}[(X_2 - \mathbb{E}[X_2])^2]\Big) = \frac{1}{2^2}2 \times \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2}
\end{aligned}$$