今野　(2009 年 10 月 06 日)

情報統計学の問題 (その１) の解答例

$\boxed{\text{問題 1}}$　母集団分布がそれぞれつぎの場合について標本の大きさが n のランダム標本の同時確率密度関数または同時確率関数を書け．

(1) 母数 $p\,(0 < p < 1)$ のベルヌーイ分布

(2) 母数 $\lambda\,(\lambda > 0)$ のポアソン分布

(3) 区間 $(a,\,b)$ 上の一様分布．ただし，$a < b$ である．

(4) 平均 μ，分散 $\sigma^2\,(< \sigma < \infty)$ の正規分布．

(5) 母数 $\lambda\,(\lambda > 0)$ の指数分布

Solutions.

(1) $f(x_1,\,\ldots,\,x_n\,|\,p) = \Pi_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$.

(2) $f(x_1,\,\ldots,\,x_n\,|\,\theta) = \Pi_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{x_1!} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}e^{-n\lambda}}{\Pi_{i=1}^n x_i!}$.

(3) $f(x_1,\,\ldots,\,x_n\,|\,a,\,b) = \Pi_{i=1}^n \frac{I_{(a,\,b)}(x_i)}{b-a} = \frac{1}{(b-a)^n}\Pi_{i=1}^n I_{(a,\,b)}(x_i)$.

(4) $f(x_1,\,\ldots,\,x_n\,|\,\mu,\,\sigma^2) = \Pi_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)\}$
$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\{-\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)\}$

(5) $f(x_1,\,\ldots,\,x_n\,|\,\lambda) = \Pi_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \exp(-\sum_{i=1}^n \lambda x_i)$

$\boxed{\text{問題 2}}$　$X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ は確率密度関数

$$f(x|\,\theta) = \theta x^{\theta-1}, \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < \theta < \infty$$

からの大きさ n のランダム標本とする．

(1) $X_1 = x_1,\,\ldots,\,X_n = x_n$ を観測したのときの尤度関数を述べよ．

(2) θ の最尤推定量を求めよ．さらに，$\tau = \theta^{-1}$ の最尤推定量は

$$\widehat{\tau}_n = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log X_i$$

で与えられることを示せ．

Solutions.

(1) $L(\theta\,|\,x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n) = \Pi_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)^{\theta-1}$.

(2) 対数尤度関数は,

$$\ell(\theta) = \log L(\theta \mid x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) = n \log \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

となる. したがって, 尤度方程式は,

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0$$

よって, 最尤推定値は,

$$\hat{\theta}(x_1,\, \ldots,\, x_n) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}.$$

さらに, θ, τ の最尤推定値を $\hat{\theta}, \hat{\tau}$ としたとき,

$$\ell(\hat{\theta}) = \max_{\theta > 0} \ell(\theta) = \max_{\tau > 0} \ell(1/\tau) = \ell(1/\hat{\tau})$$

なので, $\tau = 1/\theta$ の最尤推定値は,

$$\hat{\tau} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

となる.