今野　(2009 年 10 月 20 日)

情報統計学の問題 (その 2)

$\boxed{\text{問題 1}}$　確率変数 X を確率関数

$$f(x|\,\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|}(1-\theta)^{1-|x|}, \qquad x=-1,\,0,\,1$$

からの標本の大きさが 1 のランダム標本とする．ただし，$0<\theta<1$ とする．ふたつの統計量

$$S = S(X) = |X|, \qquad T = T(X) = \begin{cases} 2, & (X=1) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を考える．

(1) S の確率分布および S が与えられたときの X の条件付確率分布を求め，S は θ の十分統計量かどうかを調べよ．

(2) S は θ の不偏推定量かどうかを調べよ．

(3) T は θ の不偏推定量かどうかを調べよ．

Solutions.

(1) $P(S=1)=P(|X|=1)=P(\{X=1\}\cup\{X=-1\})=P(X=1)+P(X=-1)=f(-1|\,\theta)+f(1|\,\theta)=\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}=\theta$. ただし，4 番目の等号は $\{X=1\}\cap\{X=-1\}=\emptyset$ に注意して確率の性質を用いればわかる．また，$P(S=0)=P(|X|=0)=P(X=0)=f(0|\,\theta)=1-\theta$ を得る．よって，S の分布は

$$f_S(s) = \begin{cases} \theta & (s=1); \\ 1-\theta & (s=0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} = \begin{cases} \theta^x(1-\theta)^{1-s} & (s=0,\,1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

つぎに，$S=s\,(s=0,\,1)$ が与えらえたときの X の条件付分布を求める：

$$f_{X|\,S}(x|\,s) = \frac{P(X=x,\,S=s)}{P(S=s)} = \begin{cases} \frac{P(X=x,\,S=|x|)}{P(S=s)} & (s=|x|) \\ 0 & (s\neq|x|) \end{cases}$$

$s=|x|$ のとき，

$$\frac{P(X=x,\,S=|x|)}{P(S=s)} = \frac{P(X=x,\,s=|x|)}{P(S=|x|)} = \frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^s(1-\theta)^{1-s}}{\theta^s(1-\theta)^{1-s}} = \left(\frac{1}{2}\right)^s$$

よって，

$$f_{X|\,S}(x|\,1) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x=-1,\,1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad ; \qquad f_{X|\,S}(x|\,0) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

よって，S は θ に対する十分統計量.

(2) $E[S] = \sum_{s=0,1} s f_S(s|\theta) = 0 \times f_S(0|\theta) + 1 \times f_S(1|\theta) = 0 \times (1-\theta) + 1 \times \theta = \theta$ なので，S は θ の不偏推定量.

(3) $T = 2 \Leftrightarrow X = 1$ と $T = 0 \Leftrightarrow X = -1 \mathrm{or} X = 0$ なので，

$$P(T=0) = P(\{X=-1\} \cup \{X=0\}) = P(X=-1) + P(X=0) = \frac{\theta}{2} + 1 - \theta = 1 - \frac{\theta}{2}$$

なので，

$$f_T(t|\theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{2} & (t=2); \\ 1-\frac{\theta}{2} & (t=0); \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

T の確率関数は

$$E[T] = \sum_{t=0,2} t f_T(t|\theta) = 0 \times f_T(0|\theta) + 2 \times f_T(2|\theta) = 0 \times (1-\frac{\theta}{2}) + 2 \times \frac{\theta}{2} = \theta$$

なので，T も θ の不偏推定量.

問題 2　$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を確率密度関数

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sigma}\exp\{-(x-\mu)/\sigma\} I_{(\mu,\infty)}(x)$$

をもつ分布からのランダム標本とする．ただし，$-\infty < \mu < \infty$，$\sigma > 0$ である．

(1) $\mathbb{E}(X-\mu)$ と $\mathbb{VAR}(X)$ を求めよ．

(2) μ は既知として，σ の最尤推定量が $\bar{X}-\mu$ で与えられることを示せ．さらに，σ^2 の最尤推定量が $(\bar{X}-\mu)^2$ で与えられることを示せ．ただし，$\bar{X} = \sum X_i/n$ である．

Solutions.

(1) $t = (x-\mu)/\sigma \, (\sigma\, dt = dx)$ とおけば，

$$\begin{aligned} E[X-\mu] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x;\theta)\, dx = \int_{\mu}^{\infty} (x-\mu)\frac{1}{\sigma}\exp\{-(x-\mu)/\sigma\}\, dx \\ &= \sigma \int_0^{\infty} t e^{-t}\, dt = \sigma\{[-te^{-t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt\} = \sigma. \end{aligned}$$

これより，$E[X] = \mu + \sigma$ になることに注意する．さらに，同様に，

$$\begin{aligned} E[(X-\mu)^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x;\theta)\, dx = \int_{\mu}^{\infty} (x-\mu)^2\frac{1}{\sigma}\exp\{-(x-\mu)/\sigma\}\, dx \\ &= \sigma^2 \int_0^{\infty} t^2 e^{-t}\, dt = \sigma^2\{[-t^2e^{-t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2te^{-t}\, dt\} = 2\sigma^2 \int_0^{\infty} te^{-t}\, dt \\ &= 2\sigma^2. \end{aligned}$$

よって，

$$V[X] = V[X-\mu] = E[(X-\mu)^2] - \{E[X-\mu]\}^2 = 2\sigma^2 - \sigma^2 = \sigma^2$$

(2) $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ を観測したときの σ の尤度関数は

$$L(\sigma |\, x_1, \ldots, x_n) = \Pi_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)}{\sigma}\right) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)}{\sigma}\right)$$

よって，対数尤度関数は，

$$\ell(\sigma) = \log L(\sigma |\, x_1, \ldots, x_n) = -n \log \sigma - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)}{\sigma}$$

尤度方程式は，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{n}{\sigma^2}(\bar{x}_n-\mu) = 0. \\ &\Longleftrightarrow \sigma = (\bar{x}_n - \mu) \end{aligned}$$

増減表を書けば，$\sigma = (\bar{x}_n-\mu)$ のとき，ℓ は最大になることがわかるので，σ の最尤推定量は $\bar{X}_n - \mu$ となる．最後に，

$$\max_{\sigma^2>0} \ell(\sqrt{\hat{\sigma}^2}) = \max_{\sigma} \ell(\sigma)$$

より，σ^2 のの最尤推定量は $(\bar{X}_n-\mu)^2$ となる．