今野　(2009 年 10 月 27 日)

情報統計学の問題 (その 3)

$\boxed{\text{問題 1}}$　つぎの分布をもつ確率変数の分散を求めよ．

(1) X は正規分布 $N(\mu, 1)\,(-\infty < \mu < \infty)$ に従う：すなわち，X の確率密度関数は

$$f_X(x|\,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x-\mu)^2/2\}$$

Solutions. まず，X の平均を求める：

$$E[X-\mu] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f_X(x|\,\mu)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x-\mu)^2/2\,dx$$

ここで，$y = x - \mu$ と変数変換をすれば，

$$E[X-\mu] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y e^{-y^2/2}\,dy = 0.$$

最後の等号は，期待値が有限であることが知られていることに注意して，$z = ye^{-y^2/2}$ は奇関数であることからわかる．これより，X の分散は，

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x-\mu)^2/2\,dx \\ &= \left[-(x-\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x-\mu)^2/2\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x-\mu)^2/2\,dx = 1. \end{aligned}$$

２番目の等号は部分積分の公式を使い，最後の等号は確率密度関数の性質を使った．

(2) X は指数分布 $Exp(\lambda)\,(\lambda > 0)$ に従う：すなわち，X の確率密度関数は

$$f_X(x|\,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0); \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$

Solutions. まず，X の平均を求める：

$$E[X] = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-xe^{-\lambda x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

つぎに，X^2 の期待値を求める：

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xe^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

分散公式より

$$V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

(3) X はポアソン分布 $Po(\lambda)\,(\lambda > 0)$ に従う：すなわち，X の確率関数は

$$f_X(x|\,\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \qquad x = 0,\,1,\,\ldots$$

Solutions. まず，X の平均を求める：

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}e^{-\lambda} = \sum_{y+1=1}^{\infty} \frac{\lambda^{y+1}}{y!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda} = \lambda$$

つぎに，$X(X-1)$ の期待値を求める：

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} = \sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-2)!}e^{-\lambda} = \sum_{y+2=2}^{\infty}\frac{\lambda^{y+2}}{y!}e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda} = \lambda^2 \end{aligned}$$

よって，$E[X^2] = E[X] + \lambda^2$ となる．分散公式より

$$V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = E[X] + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

$\boxed{\text{問題 2}}$ つぎの分布をもつ確率変数の Fisher 情報量を求めよ．

(1) X は正規分布 $N(\mu,\,1)\,(-\infty < \mu < \infty)$ に従う：すなわち，X の確率密度関数は

$$f_X(x|\,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-(x-\mu)^2/2\}$$

Solutions. $\log f_X(x|\,\mu) = -(x-\mu)^2/2 - \log(2\pi)$ により，

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log f_X(x|\,\mu) = x - \mu$$

なので，

$$I_X(\mu) = E\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\log f_X(X|\,\mu)\right\}^2\right] = E[(X-\mu)^2] = 1$$

よって，$I_X(\mu) = 1$.

(2) X は指数分布 $Exp(\lambda)\,(\lambda > 0)$ に従う：すなわち，X の確率密度関数は

$$f_X(x|\,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0); \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

Solutions. $x > 0$ のとき，$\log f_X(x|\,\lambda) = \log\lambda - \lambda x$ なので，

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f_X(x|\,\lambda) = \frac{1}{\lambda} - x$$

よって，

$$I_X(\lambda) = E\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\log f_X(X|\,\lambda)\right\}^2\right] = E\left[\left(X - \frac{1}{\lambda}\right)^2\right] = V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

(3) X はポアソン分布 $Po(\lambda)\,(\lambda > 0)$ に従う：すなわち，X の確率関数は

$$f_X(x|\,\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \qquad x = 0,\, 1,\, \ldots$$

Solutions. 非負整数 x に対して，$\log f_X(x|\,\lambda) = x\log\lambda - \lambda - \log x!$ なので，

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f_X(x|\,\lambda) = \frac{x}{\lambda} - 1$$

よって，

$$I_X(\lambda) = E\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\log f_X(X|\,\lambda)\right\}^2\right] = E\left[\left(\frac{X}{\lambda} - 1\right)^2\right] = \frac{1}{\lambda^2}E\left[(X-\lambda)^2\right] = \frac{1}{\lambda^2}V(X) = \frac{1}{\lambda}$$