

### 4.3 順序統計量

定義 4.5  $X_1, X_2, \dots, X_n$  をランダム標本としたとき, これを小さい順に並べかえたものを

$$X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$$

を記し, これらを順序統計量という. すなわち,

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, \\ X_{(2)} &= X_1, X_2, \dots, X_n \text{ の中で 2 番目に小さいもの,} \\ &\vdots \\ X_{(n)} &= \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, \end{aligned}$$

である.

定理 4.5  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を離散型分布  $f_X(x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots$ , からの標本の大きさが  $n$  のランダム標本とする. ただし,  $x_1 < x_2 < \dots$  は  $X$  の台<sup>3</sup> とする. さらに,  $P_i = \sum_{j=1}^i p_j, i = 1, 2, \dots, P_0 = 0$  とおく.  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  を標本の順序統計量としたとき,

$$P(X_{(j)} \leq x_i) = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} P_i^k (1 - P_i)^{n-k}, \quad j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, \quad (4.9)$$

と

$$P(X_{(j)} = x_i) = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} [P_i^k (1 - P_i)^{n-k} - P_{i-1}^k (1 - P_{i-1})^{n-k}], \quad (4.10)$$

となる.

証明  $i \in \{1, 2, \dots\}$  を固定し,  $Y$  を確率変数とし,

$$Y = \#\{X_j, j = 1, 2, \dots, n \mid X_j \leq x_i\}$$

とする. ここで, 確率変数  $Z_j$  を  $\{X_j \leq x_i\}$  が起こったとき,  $Z_j = 1$ , さもなければ,  $Z_j = 0$  と定める.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  は同一分布に従うので, 各  $j$  について,

$$\mathbb{P}(Z_j = 1) = P_i = \mathbb{P}(X_j \leq x_i)$$

である. また,  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  は独立である. さらに,  $Y = \sum_{j=1}^n Z_j$  に注意すれば,  $Y$  は母数  $n, P_i$  の二項分布  $Bin(n, P_i)$  に従うことがわかる.

事象  $\{X_{(j)} \leq x_i\}$  は事象  $\{Y \geq j\}$  と同じなので,

$$\mathbb{P}(X_{(j)} \leq x_i) = \mathbb{P}(Y \geq j)$$

---

<sup>3</sup> $f_X(x) > 0$  なる点.

となり, (4.9) は示された. (4.10) を示すためには,

$$\mathbb{P}(X_{(j)} = x_i) = \mathbb{P}(X_{(j)} \leq x_i) - \mathbb{P}(X_{(j)} \leq x_{i-1})$$

を考えればよい.  $i = 1$  の場合は  $\mathbb{P}(X_{(j)} = x_i) = \mathbb{P}(X_{(j)} \leq x_i)$  よりわかる. 以上から (4.10) を示された.  $\square$

**定理 4.6**  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を分布関数  $F_X(x)$  と確率密度関数  $f_X(x)$  をもつ連続型分布からの標本の大きさが  $n$  のランダム標本とする.  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  を標本の順序統計量としたとき,  $X_{(j)}, j = 1, 2, \dots, n$ , の確率密度関数は

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f_X(x) [F_X(x)]^{j-1} [1 - F_X(x)]^{n-j}, \quad (4.11)$$

となる.

**証明**  $X_{(j)}$  の分布関数を求め, その導関数を計算することにより,  $X_{(j)}$  の確率密度関数を求めることにする.

実数  $x$  を固定する.  $Y$  を確率変数とし,

$$Y = \#\{X_j, j = 1, 2, \dots, n \mid X_j \leq x\}$$

とする. ここで, 確率変数  $Z_j$  を  $\{X_j \leq x\}$  が起こったとき,  $Z_j = 1$ , さもないければ,  $Z_j = 0$  と定める.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  は同一分布に従うので, 各  $j$  について,

$$\mathbb{P}(Z_j = 1) = P_i = F_X(x)$$

である. また,  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  は独立である. さらに,  $Y = \sum_{j=1}^n Z_j$  に注意すれば,  $Y$  は母数  $n, P_i$  の二項分布  $Bin(n, F_X(x))$  に従うことがわかる. これらより

$$F_{X_{(j)}}(x) = \mathbb{P}(Y \geq j) = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} [F_X(x)]^k [1 - F_X(x)]^{n-k}$$

となる．したがって， $X_{(j)}$  の確率密度関数は

$$\begin{aligned}
 f_{X_{(j)}}(x) &= \frac{d}{dx} F_{X_{(j)}}(x) \\
 &= \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} \left( k[F_X(x)]^{k-1}[1-F_X(x)]^{n-k} f_X(x) \right. \\
 &\quad \left. - (n-k)[F_X(x)]^k[1-F_X(x)]^{n-k-1} f_X(x) \right) \\
 &= \binom{n}{j} j f_X(x) [F_X(x)]^{j-1} [1-F_X(x)]^{n-j} \\
 &\quad + \sum_{k=j+1}^n \binom{n}{k} k [F_X(x)]^{k-1} [1-F_X(x)]^{n-k} f_X(x) \\
 &\quad - \sum_{k=j}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k) [F_X(x)]^k [1-F_X(x)]^{n-k-1} f_X(x) \\
 &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f_X(x) [F_X(x)]^{j-1} [1-F_X(x)]^{n-j} \\
 &\quad + \sum_{k=j}^{n-1} \binom{n}{k+1} (k+1) [F_X(x)]^k [1-F_X(x)]^{n-k-1} f_X(x) \\
 &\quad - \sum_{k=j}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k) [F_X(x)]^k [1-F_X(x)]^{n-k-1} f_X(x)
 \end{aligned}$$

となる．最後に，

$$\binom{n}{k+1} (k+1) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} = \binom{n}{k} (n-k)$$

から (4.11) は示される． □

例 4.4  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を  $(0, 1)$  上の一様分布からの標本の大きさが  $n$  のランダム標本とする．すなわち，

$$F_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \leq 0, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases},$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}$$

である．このとき，(4.11) から

$$f_{X_{(j)}} = \begin{cases} \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} x^{j-1} (1-x)^{n-j}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

となる．また，補遺の代表的な広義積分 (iii) から

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{(j)}] &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \int_0^1 x^j (1-x)^{n-j} dx \\ &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(n+2)} \\ &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \frac{j!(n-j)!}{(n+1)!} \\ &= \frac{j}{n+1}\end{aligned}$$

となる．

定理 4.7  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を分布関数  $F_X(x)$  と確率密度関数  $f_X(x)$  をもつ連続型分布からの標本の大きさが  $n$  のランダム標本とする． $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  を標本の順序統計量としたとき， $X_{(i)}$  と  $X_{(j)}$ ， $1 \leq i \leq j \leq n$ ，の同時確率密度関数は

$$f_{X_{(i)}, X_{(j)}}(u, v) = \begin{cases} \frac{n!}{(i-1)!(j-1-i)!(n-j)!} f_X(u) f_X(v) [F_X(u)]^{i-1} \\ \quad \times [F_X(v) - F_X(u)]^{j-i-1} [1 - F_X(v)]^{n-j}, & -\infty < u < v < \infty, \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (4.12)$$

となる．

証明 証明は省略する． □

系 4.2  $X_{(1)}$  と  $X_{(n)}$  の同時確率密度関数は

$$f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x_1, x_n) = \begin{cases} n(n-1)[F_X(x_n) - F_X(x_1)]^{n-2} f_X(x_1) f_X(x_n) & x_1 < x_n, \\ 0 & x_1 \geq x_n \end{cases}$$

で与えられる．

例 4.5  $X_1, X_2, \dots, X_n, n \geq 2$  は独立同一に  $(0, 1)$  上の一様分布に従うとする．すなわち，各  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$  は確率密度関数と分布関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x & 0 < x < 1, \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

を持つ．定理 4.6 から

$$f_{X_{(j)}}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} x^{j-1} (1-x)^{n-1} & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる．