今野　(2009 年 11 月 10 日)

情報統計学の問題 (その４)

$\boxed{\text{問題 1}}$　$\bar{X}_n$ を標本平均（連続型確率変数）とし，$E[\bar{X}_n]=\mu$，$a>0$ は定数としたとき，つぎの確率を求めよ
(1) 定数 $0<\gamma<1$ に対して，$P(\mu-a\le\bar{X}_n\le\mu+a)=\gamma$ のとき，確率

$$P(\bar{X}_n-a\le\mu\le\bar{X}_n+a)$$

を求めよ．答えだけでなく，途中の論理も書くこと．
(2) $P(\bar{X}_n>\mu+a)=P(\bar{X}_n<\mu-a)=\gamma/2$ としたとき，確率

$$P(\bar{X}_n-a\le\mu\le\bar{X}_n+a)$$

を求めよ．答えだけでなく，途中の論理も書くこと．

$\boxed{\textbf{Solutions}}$
(1)

$$\begin{aligned}\mu-a\le\bar{X}_n\le\mu+a &\iff \mu-a\le\bar{X}_n \quad \text{かつ} \quad \bar{X}_n\le\mu+a\\ &\iff \mu\le\bar{X}_n+a \quad \text{かつ} \quad \bar{X}_n-a\le\mu\\ &\iff \bar{X}_n-a\le\mu\bar{X}_n+a\end{aligned}$$

なので，事象 $\{\mu-a\le\bar{X}_n\le\mu+a\}$ が起これば，事象 $\{\bar{X}_n-a\le\mu\bar{X}_n+a\}$ は起こり，逆に，事象 $\{\bar{X}_n-a\le\mu\bar{X}_n+a\}$ は起これば，事象 $\{\mu-a\le\bar{X}_n\le\mu+a\}$ は起こるので，二つの事象の確率は等しいことから

$$P(\bar{X}_n-a\le\mu\le\bar{X}_n+a)=\gamma$$

(2) 上の議論より $\{\bar{X}_n-a\le\mu\le\bar{X}_n+a\}=\{\bar{X}_n-a\le\mu\}\cap\{\mu\le\bar{X}_n+a\}$ に注意して，ドモルガンの法則を用いると

$$\begin{aligned}\{\bar{X}_n-a\le\mu\le\bar{X}_n+a\}^c &= \{\bar{X}_n-a\le\mu\}^c\cup\{\mu\le\bar{X}_n+a\}^c\\ &= \{\bar{X}_n-a>\mu\}\cup\{\mu>\bar{X}_n+a\}\\ &= \{\bar{X}_n>\mu+a\}\cup\{\bar{X}_n<\mu-a\}\end{aligned}$$

となる．さらに，

$$\{\bar{X}_n>\mu+a\}\cap\{\bar{X}_n<\mu-a\}=\emptyset$$

なので，確率の性質より

$$\begin{aligned}P[\{\bar{X}_n-a\le\mu\le\bar{X}_n+a\}^c] &= P[\{\bar{X}_n>\mu+a\}\cup\{\bar{X}_n<\mu-a\}]\\ &= P(\bar{X}_n>\mu+a)+P(\bar{X}_n<\mu-a)=\gamma/2+\gamma/2=\gamma\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}P(\bar{X}_n-a\le\mu\le\bar{X}_n+a) &= 1-P[\{\bar{X}_n-a\le\mu\le\bar{X}_n+a\}^c]\\ &= 1-\gamma.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 2}}$ $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$ は正規分布 $N(\mu, 10^2)$ からのランダム標本とする．
(1) $\bar{X}_{12} = (1/12)(X_1 + \cdots + X_{12})$ としたとき，$\bar{X}_{12}$ の期待値と分散を計算することにより，$\bar{X}_{12}$ の分布を述べよ．
(2) $a > 0, b$ を定数とし，$Z = a\bar{X}_{12} + b$ としたとき，Z の分布が標準正規分布になるように定数 a, b を定めよ．
(3) $P(Z > 1.65) = 0.05$ であることを用いて，信頼係数 90% の μ の信頼区間を構成せよ．

$\boxed{\textbf{Solutions}}$
(1) $\bar{X}_{12}$ の期待値と分散は以下になる：

$$\begin{aligned}
E[\bar{X}_{12}] &= (1/12)\{E[X_1] + \cdots + E[X_{12}]\} = (1/12) \times 12\mu = \mu. \\
VAR[\bar{X}_{12}] &= (1/12)^2 = VAR[X_1 + \cdots X_{12}] \\
&= (1/12)^2\{VAR[X_1] + \cdots + VAR[X_{12}]\} = (1/12)^2 \times 12 \times 10 = 10/12
\end{aligned}$$

したがって，正規分布に従う確率変数の一次結合の分布は正規分布なので，$\bar{X}_{12}$ の分布は $N(\mu, 10/12)$ となる．
(2) Z は標準正規分布に従うとき，$E[Z] = 0, VAR[Z] = 1$ となるので，

$$\begin{aligned}
0 = E[Z] = aE[\bar{X}_{12}] + b &= a\mu + b \\
1 &= VAR[Z] = a^2 VAR[\bar{X}_{12}] = a^2(10/12)
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{cases} a\mu + b = 0 \\ a^2(10/12) = 1 \end{cases}$$

より，$a = \sqrt{12/10}, b = -\sqrt{12/10}\mu$. よって，

$$Z = \frac{\bar{X}_{12} - \mu}{\sqrt{10/12}}$$

(3) $\{-1.65 \le Z \le 1.65\} = \{-1.65 \le Z\} \cap \{Z \le 1.65\}$ から

$$\{-1.65 \le Z \le 1.65\}^c = \{-1.65 \le Z\}^c \cup \{Z \le 1.65\}^c = \{-1.65 > Z\} \cup \{Z > 1.65\}$$

$\{-1.65 > Z\} \cap \{Z > 1.65\} = \emptyset$ なので，

$$\begin{aligned}
P(-1.65 \le Z \le 1.65) &= 1 - P[\{-1.65 \le Z \le 1.65\}^c] \\
&= 1 - \{P[\{-1.65 > Z\} \cup \{Z > 1.65\}]\} \\
&= 1 - \{P(-1.65 > Z) + P(Z > 1.65)\}
\end{aligned}$$

正規分布の確率密度関数は偶関数であることより，

$$P(-1.65 > Z) = P(Z > 1.65) = 0.05$$

なので，

$$P(-1.65 \le Z \le 1.65) = 1 - 0.05 - 0.05 = 0.9$$

ここで，$\frac{\bar{X}_{12} - \mu}{\sqrt{10/12}}$ は標準正規分布に従うことを用いると

$$P\left(-1.65 \le \frac{\bar{X}_{12} - \mu}{\sqrt{10/12}} \le 1.65\right) = 0.9$$

さらに，

$$
\begin{aligned}
-1.65 \le \frac{\bar{X}_{12}-\mu}{\sqrt{10/12}} \le 1.65 \iff & -1.65 \le \frac{\bar{X}_{12}-\mu}{\sqrt{10/12}} \quad \text{かつ} \quad \frac{\bar{X}_{12}-\mu}{\sqrt{10/12}} \le 1.65 \\
\iff & -1.65\sqrt{10/12} \le \bar{X}_{12}-\mu \quad \text{かつ} \quad \bar{X}_{12}-\mu \le 1.65\sqrt{10/12} \\
\iff & \mu - 1.65\sqrt{10/12} \le \bar{X}_{12} \quad \text{かつ} \quad \bar{X}_{12} \le \mu + 1.65\sqrt{10/12} \\
\iff & \mu \le \bar{X}_{12} + 1.65\sqrt{10/12} \quad \text{かつ} \quad \bar{X}_{12} - 1.65\sqrt{10/12} \le \mu \\
\iff & \bar{X}_{12} - 1.65\sqrt{10/12} \le \mu \le \bar{X}_{12} + 1.65\sqrt{10/12}
\end{aligned}
$$

なので，

$$
0.9 = P\left(-1.65 \le \frac{\bar{X}_{12}-\mu}{\sqrt{10/12}} \le 1.65\right) = P\left(\bar{X}_{12} - 1.65\sqrt{10/12} \le \mu \le \bar{X}_{12} + 1.65\sqrt{10/12}\right)
$$

よって，信頼係数 90% の μ の信頼区間は

$$
\left[\bar{X}_{12} - 1.65\sqrt{10/12},\ \bar{X}_{12} + 1.65\sqrt{10/12}\right]
$$