

情報統計学の問題 (その 5)

問題 1
定問題

$X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ を正規母集団 $N(\mu, 1)$ からの大きさ n の無作為標本とし, 検

$$H_0: \mu = 0, \text{ vs. } H_1: \mu > 0$$

を考える.

(1) $\bar{x}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$ としたとき,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

を求めよ.

(2) 観測 $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ を得たとき, μ に関する尤度関数 $L(\mu)$ を書け. ただし, $L(\mu)$ は $\exp(-\frac{n}{2}(\bar{x}_n - \mu)^2)$ の乗数倍という形でかけるが, その乗数も含めて書くこと.

(3) 検定問題 $H_0: \mu = 0, \text{ vs. } H_1: \mu' (\mu' > 0)$ を考える. 定数 $k (0 < k < 1)$ に対して,

$$L(0) < kL(\mu') \iff \bar{x}_n > k'$$

となるが, k' を k, μ', n 等必要な記号を用いて表現せよ.

(4) 帰無仮説 H_0 のもと, \bar{X}_n の分布を求め, \bar{X}_n を一次変換することにより, 標準正規分布に従う確率変数を構成せよ.

(5) 検定関数を

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & (\bar{x}_n > k') \\ 0 & (\bar{x}_n \leq k') \end{cases}$$

と定めたとき, 有意水準 $\alpha (0 < \alpha < 1)$ となるように k' を

$$\int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \alpha$$

となる u の値 $u(\alpha)$ を用いて定めよ.