第 8 章　信頼区間

1　信頼区間の定義

定義 8.1　$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を実数値母数 $\theta\,(\theta \in \Theta)$ に依存する同時分布に従う確率変数ベクトルとし，$L(\boldsymbol{X}) < U(\boldsymbol{X})$ を統計量とする．ただし，Θ を母数空間とする．このとき，区間 $[L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})]$ が θ に対する信頼係数 $100p\%\,(0 < p < 1)$ の信頼区間であるとは，すべての $\theta \in \Theta$ に対し

$$\mathbb{P}_\theta[L(\boldsymbol{X}) \le \theta \le U(\boldsymbol{X})] \ge p$$

が成立することである．ただし，すくなくともひとつの θ に対し等号が成立しなけらばならない．

p は信頼水準，信頼限界または被覆確率という．

定義 8.2　すべての $\theta \in \Theta$ に対し

$$\mathbb{P}_\theta\{\theta \ge L(\boldsymbol{X})\} \ge p$$

となる統計量 $L(\boldsymbol{X})$ を θ に対する信頼係数 $100p\%$ 信頼下限といい，

$$\mathbb{P}_\theta\{U(\boldsymbol{X}) \ge \theta\} \ge p$$

となる統計量 $U(\boldsymbol{X})$ を θ に対する信頼係数 $100p\%$ 信頼上限という．

$L(\boldsymbol{X})$ を θ に対する $100p_1\%$ 信頼下限とし，$U(\boldsymbol{X})$ を θ に対する $100p_2\%$ 信頼上限で $L(\boldsymbol{X}) < U(\boldsymbol{X})$ したとき，区間 $[L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})]$ は θ に対する信頼係数 $100p\%$ の信頼区間となる．ただし，$p = p_1 + p_2 - 1$ である．

例 8.1　$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を独立同一に正規分布 $N(\mu, 1)$ に従う確率変数とする．このとき，$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従い，

$$\mathbb{P}_\mu\{-1.96 \le \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \le 1.96\} = 0.95$$

となる．ただし，$\bar{X}_n = (1/n)\sum_{i=1}^n X_i$ である．事象 $\{-1.96 \le \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \le 1.96\}$ は $\{\bar{X}_n - 1.96/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{X}_n + 1.96/\sqrt{n}\}$ に等しいので，

$$\mathbb{P}_\mu\left[\bar{X}_n - \frac{1.96}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}_n + \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right] = 0.95$$

となる．したがって，$[\bar{X}_n - 1.96/\sqrt{n}, \bar{X}_n + 1.96/\sqrt{n}]$ は μ に対する信頼係数 95% の信頼区間となる．

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を独立同一に平均 μ，分散 1 の分布に従う確率変数とする．このとき，中心極限定理から $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に漸近的に従うことがわかるので，n が十分大きいとき

$$\mathbb{P}_\mu\{-1.96 \le \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \le 1.96\} \approx 0.95$$

となる．$[\bar{X}_n - 1.96/\sqrt{n}, \bar{X}_n + 1.96/\sqrt{n}]$ は μ に対する信頼係数 95% の近似信頼区間となる．

2　ピボット法

$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を実数値母数 $\theta\,(\theta \in \Theta)$ に依存する同時分布に従う確率変数ベクトルとし，$g(\boldsymbol{X}, \theta)$ を確率変数とし，その分布は θ には依存しないとする．すなわち，

$$\mathbb{P}_\theta\{g(\boldsymbol{X}, \theta) \le x\} = G(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

は分布関数で θ に依存しないものである．以後では，簡単なために $G(x)$ は $\{x \in \mathbb{R} : G(x) > 0\}$ 上で狭義単調増加の分布関数と仮定する．しがたって，うまく実数 a, b をとり

$$\mathbb{P}_\theta\{a \le g(\boldsymbol{X}, \theta) \le b\} = p$$

とできる．さらに，事象 $\{a \le g(\boldsymbol{X}, \theta) \le b\}$ を変形して，

$$\mathbb{P}_\theta[L(\boldsymbol{X}) \le \theta \le U(\boldsymbol{X})] = p$$

なる $L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})$ を見つけることができることが期待できる．このように，信頼区間を構成するにあたり利用する確率変数 $g(\boldsymbol{X}, \theta)$ を θ に対するピボットという．要点は $g(\boldsymbol{X}, \theta)$ の分布が未知母数 θ に依存しないことである．

例 8.2　$X_1, X_2, \ldots, X_n\,(n \ge 2)$ は独立同一に $[0, \theta]$ 上の一様分布に従うとする．ただし，$\theta > 0$ である．このとき，θ の最尤推定量は　$X_1, X_2, \ldots, X_n\,(n \ge 2)$ の最大値 $X_{(n)}$ である．また，$X_{(n)}/\theta$ の分布関数は

$$G(x) \equiv \mathbb{P}_\theta\{X_{(n)}/\theta \le x\} = x^n\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x) + \mathbb{I}_{(1,\infty)}(x)$$

である．したがって，$X_{(n)}/\theta$ は θ に対するピボットとなる．信頼係数 $100p\%$ の信頼区間を見つけるためには

$$\mathbb{P}_\theta\left[a \le \frac{X_{(n)}}{\theta} \le b\right] = p$$

なる a と b を見つければよい．$X_{(n)}/\theta$ の確率密度関数は単調増加なので，$a = (1-p)^{1/n}$ と $b = 1$ とすれば，区間 $[a, b]$ は最短[1]になる．さらに，信頼係数が $100p\%$ の信頼区間 $[X_{(n)}/a, X_{(n)}/b]$ の中で $[X_{(n)}, X_{(n)}/(1-p)^n]$ が最短となること[2]もわかる．

[1] $[(1-p)^{1/n}, 1]$ が最短区間になることは以下のことからわかる．$X_{(n)}/\theta$ の確率密度関数を $f(x)$ とする．$b < 1$ と仮定すれば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+1-b} f(x)\,dx + \int_{a+1-b}^b f(x)\,dx - \int_b^1 f(x)\,dx + \int_b^1 f(x)\,dx \le \int_{a+1-b}^b f(x)\,dx$$

となる．なぜならば，$f(x)$ の単調性から

$$\int_a^{a+1-b} f(x)\,dx - \int_b^1 f(x)\,dx \le 0$$

からわかる．あとは，

$$\mathbb{P}_\theta\left[a \le \frac{X_{(n)}}{\theta} \le 1\right] = G(1) - G(a) = 1 - a^n = p$$

に注意すればよい．

[2] $ab \le 1$ から $1/b - 1/a = (b-a)/(ab) > 1 - (1-p)^p$ となることよりわかる．

例 8.3 $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ が独立同一に母数 θ の指数分布

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta x}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$$

に従うとする．ただし，$\theta > 0$ である．このとき，$2\theta X_1$ は自由度 2 のカイ 2 乗分布[3] に従うので，$2\theta \sum_{i=1}^{10} X_i$ は自由度 20 のカイ 2 乗分布に従う．したがって，たとえば，信頼係数 90% の信頼区間は

$$\mathbb{P}_\theta\left[a \le 2\theta \sum_{i=1}^{10} X_i \le b\right] = 0.90$$

なる a, b を見つけることになる．これは

$$\mathbb{P}_\theta\left[2\theta \sum_{i=1}^{10} X_i \le a\right] = 0.05, \qquad \mathbb{P}_\theta\left[2\theta \sum_{i=1}^{10} X_i \le b\right] = 0.95$$

から $a = 10.85, b = 31.41$ となる．したがって，

$$\left[\frac{5.425}{\sum_{i=1}^{10} X_i}, \frac{15.705}{\sum_{i=1}^{10} X_i}\right]$$

となる．しかし，カイ 2 乗分布の確率密度関数はモードに関して非対称なので，これは最短の区間ではない．実際，

$$\left[\frac{4.893}{\sum_{i=1}^{10} X_i}, \frac{14.938}{\sum_{i=1}^{10} X_i}\right]$$

が最短となることが知られている．

未知母数を $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$ とし，θ_1 に対する信頼区間を構成することを考える．$g(\boldsymbol{X}, \theta_1)$ は θ_1 のみに依存する確率変数で $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_p$ には依存しないとする．さらに，$g(\boldsymbol{X}, \theta_1)$ の分布は $\boldsymbol{\theta}$ には依存しないとする．すなわち

$$\mathbb{P}_\mu\{g(\boldsymbol{X}, \theta_1) \le x\} = G(x)$$

とする．このような場合，ピボット $g(\boldsymbol{X}, \theta_1)$ を用いて θ_1 の信頼区間を構成することができる．

例 8.4 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を独立同一に正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数とする．ここで，μ, σ^2 は未知とする．μ に対する信頼区間を求めよう．そのために，

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S}$$

とおく．ただし

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

[3] 自由度 k のカイ 2 乗分布の確率密度関数は

$$\frac{1}{\Gamma(k/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} x^{(k/2)-1} e^{-(1/2)x}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$$

であるので，自由度 2 のカイ 2 乗分布の密度関数は $(1/2)e^{-(1/2)x}$ となることに注意．

である．$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/S$ は自油度 $(n-1)$ の t 分布[4]に従いので，この分布は μ, σ^2 に依存しないので，μ のピボットとなる．

また，σ^2 の信頼区間を構成するために

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

となるので，σ^2 のピボットとなる．

多くの場合には，ピボットの分布を厳密に求めることが難しい．しかし，ピボットの分布の近似（漸近分布）を求めることができる．すなわち，ピボット $g(\boldsymbol{X}, \theta)$ に対し

$$\mathbb{P}_\theta\{g(\boldsymbol{X}, \theta) \le x\} \approx G(x)$$

なる θ に依存しない分布関数 $G(x)$ を求めることができることがおおい．以下は近似がうまくいくために，標本数 n は大きいと仮定し，大きさ n のランダム標本（i.i.d. 標本）が得られる場合を考える．$\hat{\theta}_n$ は n 個の標本に基づく θ の推定量とし，その漸近分布が平均 θ，分散 $\sigma_n^2(\theta)$ の正規分布と仮定する．すなわち，

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n(\theta)} \xrightarrow{L} N(0, 1)$$

とする[5]．さらに，$\sigma(\theta)$ に $\hat{\theta}_n$ を代入したもの

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n(\hat{\theta}_n)}$$

も漸近的に標準正規分布に従うことが多くの場合保証されるので，これをピボットとして用いればよい．これらのことより

$$\mathbb{P}_\theta\{-z_{p/2} \le \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n(\hat{\theta}_n)} \le z_{p/2}\} \approx 1 - p$$

を得る．ただし，$z_{p/2}$ は $1 - \Phi(z_{p/2}) = p/2$ をみたす点である．したがって，θ に対する信頼係数 $100(1-p)\%$ の近似信頼区間は $[\hat{\theta}_n - z_{p/2}\sigma_n(\hat{\theta}_n), \hat{\theta}_n + z_{p/2}\sigma_n(\hat{\theta}_n)]$ で与えられる．

例 8.5　　X を二項分布 $Bin(n, \theta)$ に従う確率変数とする．ただし，$\theta\,(0 < \theta < 1)$ は未知とする．このとき，θ の最尤推定量は $\hat{\theta} = X/n$ である．n が十分大きければ，$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)/\sqrt{\theta(1-\theta)}$ は近似的に標準正規分布に従うことが中心極限定理よりわかる．したがって，θ に対する信頼係数 95% の近似信頼区間は

$$\mathbb{P}_\theta\left[-1.96 \le \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \le 1.96\right] = \mathbb{P}_\theta\left[\frac{n(\hat{\theta} - \theta)^2}{\theta(1-\theta)} \le (1.96)^2\right] \approx 0.95$$

[4] 自由度 k の t 分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)\sqrt{\pi k}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{(k+1)/2}}$$

で与えられる．

[5] これはすべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$n \to \infty$ のとき

$$\mathbb{P}_\theta\left\{(\hat{\theta}_n - \theta)/\sigma_n(\theta)\right\} \to \Phi(x)$$

となることである．ただし，$\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積分布関数である．

より構成できる．したがって，θ に対する信頼係数 95% の近似信頼区間は

$$\{g(tO := n(\hat{\theta}_n - t)^2 - (1.96)^2 t(1-t) \leq 0\}$$

となる．$g(t) = 0$ の解は

$$t = \frac{\hat{\theta}_n + (1.96)^2/(2n) \pm 1.96\{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)/n + (1.96)^2/(4n^2)\}^{1/2}}{1 + (1.96)^2/n}$$

となる．したがって，信頼区間はこの 2 点を両端にもつ区間となる．または，ピボットとして

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sqrt{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}}$$

を利用すれば，θ に対する信頼係数 95% の近似信頼区間は

$$\left[\hat{\theta}_n - 1.96\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}},\ \hat{\theta}_n + 1.96\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}}\right]$$

となる．n が大きいときには，このふたつの信頼区間は違いは小さい．

3　演習問題

$\boxed{\text{問題 8.1}}$　$X_1, X_2, \ldots, X_n (n \geq 2)$ を確率密度関数

$$f_X(x|\,\mu) = e^{-(x-\mu)} I_{[\mu,\,\infty)}(x) \qquad \mu > 0$$

からの大きさ n のランダム標本とする．ただし，$I_A(x)$ は指示関数とする．すなわち，集合 A に対し，$x \in A$ ならば，$I_A(x) = 1$，$x \notin A$ ならば，$I_A(x) = 0$ である．

(1) X_1 の累積分布関数を求めよ．

(2) $Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ としたとき，Y の確率密度関数は

$$f_Y(y|\,\mu) = ne^{-n(y-\mu)} I_{[\mu,\,\infty)}(y)$$

で与えられることを示せ．

(3) 信頼係数 $100p\%\,(0 < p < 1)$ の μ の信頼区間を構成せよ．ただし

$$\mathbb{P}_\mu(Y - \mu \leq a) = \frac{1-p}{2}, \qquad \mathbb{P}_\mu(Y - \mu \geq b) = \frac{1-p}{2}$$

をみたす点 $a, b\,(a < b)$ を利用する．

$\boxed{\text{問題 8.2}}$　$X_1, X_2, \ldots, X_n\,(n \geq 2)$ を $(0, \theta)$ 上の一様分布からのランダム標本とする．ただし，$\theta > 0$ である．また，$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の順序統計量とし，r を $1 \leq r \leq n-1$ なる任意の自然数とする．このとき，$X_{(r)}/\theta$ をピボットとして，信頼係数 $100p\%\,(0 < p < 1)$ の θ の信頼区間を構成せよ．

<u>ヒント 1</u>：$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\,(n \geq 2)$ は独立同一分布に従い，連続な分布関数 $F_Y(y)$（確率密度関数を $f_Y(y)$ とする）を持つとき，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ の r 番目の順序統計量 $Y_{(r)}$ の確率密度関数は

$$f_Y(y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f_Y(y)[F_Y(y)]^{r-1}[1 - F_Y(y)]^{n-r}$$

となる．
ヒント 2：確率変数 Z はパラメータ $(\alpha,\, \beta)$ のベータ分布に従うとする：すなわち，Z の確率密度関数は

$$f_Z(z) = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} I_{(0,\,1)}(x)$$

である．ただし，$\alpha > 0, \beta > 0$ である．このとき，$q\,(0 < q < 1)$ に対して，$u_q(\alpha,\, \beta)$ と $l_q(\alpha,\, \beta)$ を

$$\int_{u_q(\alpha,\,\beta)}^{1} f_Z(z)\,dz = q, \qquad \int_0^{l_q(\alpha,\,\beta)} f_Z(z)\,dz = q$$

をみたすものとする．