今野　(2011 年 01 月 26 日)

情報統計学のレポート問題（締切：2 月 7 日（月）17:00・提出先：数研レポート箱）

解答上の注意

特別な指示がある場合を除き，解答の途中過程の論理的展開を重視して採点をします．以下の点に留意して解答を作成すること．

(1) 解答の途中過程は丁寧に記述すること．

(2) 設問中で証明することを求めている場合をのぞき，講義で述べたことおよび別ファイルの「統計解析の備忘録」は証明なしに用いてよい．しかし，なにをどのように用いたかを可能な限り明示すること．

(3) 各自が理解していることを採点者にわかるように解答を作成することを心がけること．

(4) 等号の使い方に注意すること．

(5) 順番にすべての問題を解答すること．

(6) 理解しているかどうか不明のときは，呼び出しをして口頭試問をします．

問題 1　離散型確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を母数 $p\,(0 < p < 1)$ のベルヌーイ分布からの標本の大きさ n のランダム標本とする．すなわち，

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \qquad \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

(1) 確率変数 X_1 の期待値 $\mathbb{E}[X_1]$ と分散 $\mathbb{VAR}[X_1]$ を求めよ．
(2) 標本平均 $\bar{X}_n = (1/n)(X_1 + \cdots + X_n)$ の期待値を計算せよ．
(3) $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$ を観測したときの p の尤度関数を書き，それを最大にする p を求めることにより，p の最尤推定値を求めよ．
(4) p の推定量である標本平均 $\bar{X}_n$ の平均自乗誤差 $\mathrm{MSE}(p, \bar{X}_n) = \mathbb{E}[(\bar{X}_n - p)^2]$, $(0 < p < 1)$ を求め，そのグラフを描け．

問題 2　連続型確率変数列 X_1, X_2, X_3 は正規母集団 $N(\mu, 3)$（平均が 3，分散が 3 の正規分布に従う母集団分布）からの標本の大きさ 3 のランダム標本とする．次の仮説検定問題を考える：

$$\text{帰無仮説} \quad H_0 : \mu = 0 \quad \text{vs. 対立仮説} \quad H_1 : \mu = 2$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) H_0 と H_1 は単純仮説か複合仮説かを答えよ．

(2) $\bar{X}_3 = (1/3)(X_1 + X_2 + X_3)$ とする．$\bar{X}_3$ は帰無仮説 $H_0 : \mu = 0$ のもとでどのようなものになるかを答えよ．理由も述べること．

(3) H_0 の棄却域を
$$C(t) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\, x_1 + x_2 + x_3 > t\}$$
としたとき，$C(t)$ が有意水準 0.1 の検定の棄却域になるように t をひとつ定めよ．t を求めるときには小数第 3 位を四捨五入せよ．問題 5 のヒントを使うこと．

(4) 棄却域 $C(t)$ の検出力を 対立仮説 $H_1 : \mu = 2$ のもとで求めよ．ただし，解答は関数 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}(1/\sqrt{2\pi})e^{-t^2/2}\,dt$ および t を用いて表現せよ．すなわち，具体的な値を計算しなくともよい．

$\boxed{\text{問題 3}}$ 離散型確率変数 X_1, X_2, X_3 は独立同一の分布に従い，$i = 1, 2, 3$ に対して，

$$f_{X_i}(x) = \mathbb{P}(X_i = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & x = 1; \\ \dfrac{1}{3} & x = 2; \\ \dfrac{1}{6} & x = -1; \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とする．すわわち，f_{X_i} は X_i の確率関数である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 確率変数 X_i の期待値 $\mathbb{E}[X_i]$ を求めよ．ただし，$i = 1, 2, 3$ である．

(2) 確率変数 $X_1 + X_2 + X_3$ の期待値 $\mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3]$ を求めよ．

(3) 確率変数 X_i の分散 $\mathbb{VAR}[X_i]$ を求めよ．ただし，$i = 1, 2, 3$ である．

(4) $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ とする．$i \neq j$ のとき，確率変数 X_i と X_j の共分散 $\mathbb{COV}[X_i, X_j]$ を求めよ．

(5) 確率変数 $X_1 + X_2 + X_3$ の分散 $\mathbb{VAR}[X_1 + X_2 + X_3]$ を求めよ．

(6) $\bar{X}_3 = \dfrac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$ としたとき，確率変数 $\bar{X}_3$ の分散 $\mathbb{VAR}[\bar{X}_3]$ を求めよ．

(7) 確率変数 $\sqrt{3}(\bar{X}_3 - 1)$ の期待値 $\mathbb{E}[\sqrt{3}(\bar{X}_3 - 1)]$ を求めよ．

(8) 確率変数 $\sqrt{3}(\bar{X}_3 - 1)$ の分散 $\mathbb{VAR}[\sqrt{3}(\bar{X}_3 - 1)]$ を求めよ．

$\boxed{\text{問題 4}}$ $\theta > 0$ とする．連続型確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x|\,\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & (0 < x < 1); \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

からの大きさ 1 のランダム標本とする．

(1) 連続型確率変数 X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ を求めよ．

(2) 連続型確率変数 X の分布関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)\,(x \in \mathbb{R})$ を求めよ．

(3) $X = x\,(0 < x < 1)$ を観測したのときの尤度関数を述べよ (答えのみでよい)．

(4) θ の最尤推定値を求めよ．

$\boxed{\text{問題 5}}$　以下の問いに答えよ．
(1) 確率変数 X は平均 $\mu\,(-\infty < \mu < \infty)$，分散 $\sigma^2\,(\sigma > 0)$ の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする．$Z = (X-\mu)/\sigma$ としたとき，Z の分布を求めよ．
(2) 確率 $\mathbb{P}(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma)$ を求めよ．
(3) $\mathbb{P}(-k_1 \leq X \leq k_2) = 0.90$ となるような k_1, k_2 を μ, σ 等を用いて一組（答えは一意的ではない！）求めよ．
(4) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本の大きさ $n\,(n \geq 2)$ のランダム標本とする．このとき，$\bar{X}_n = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$ の分布を求めよ．
(5) $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \geq m) = 0.80$ となるような m を n, μ, σ 等を用いて求めよ．

ヒント：以下のことは用いてよい：

- $\mathbb{P}(Z > 1) = 0.159$, $\mathbb{P}(Z > 1.28) = 0.10$, $\mathbb{P}(Z > 1.64) = 0.05$, $\mathbb{P}(Z > 2.33) = 0.01$,
- 正規分布に従う確率変数の線形結合の分布も正規分布である．

$\boxed{\text{問題 6}}$　確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x|\,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & (0 \leq x \leq \theta) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

からの標本の大きさ 1 のランダム標本とする．ただし，$\theta > 0$ とする．
(1) X の分布関数 $F_X(x|\,\theta) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t|\,\theta)\,dt$ を求めよ．
(2) $X = x\,(x > 0)$ が観測されたときの尤度関数 $L(\theta|\,x)$ のグラフを書け．ただし，横軸は θ で，縦軸は $L(\theta|\,x)$ とする．グラフから，最尤推定値 x を求めよ（証明の必要はない）．
(3) θ の推定量 $2X$ は θ の不偏推定量かどうかを調べよ．
(4) θ の推定量 $2X$ の平均二乗誤差 $MSE_{2X}(\theta) = \mathbb{E}[(2X-\theta)^2]$ を求め，そのグラフを描け．ただし，横軸は θ で，縦軸は $MSE_{2X}(\theta)$ とする．