第 8 章　信頼区間

母集団分布から無作為標本に基づき，母集団分布の未知の母数を区間で推定する方法とその推定精度の評価法について学ぶ．

1　信頼区間の定義

定義 8.1　$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を実数値母数 $\theta\,(\theta \in \Theta)$ に依存する同時分布に従う確率変数ベクトルとし，$L(\boldsymbol{X}) < U(\boldsymbol{X})$ を統計量とする．ただし，Θ を母数空間とする．このとき，区間 $[L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})]$ が θ に対する信頼係数 $100p\%\,(0 < p < 1)$ の信頼区間であるとは，すべての $\theta \in \Theta$ に対し

$$\mathbb{P}_\theta[L(\boldsymbol{X}) \le \theta \le U(\boldsymbol{X})] \ge p$$

が成立することである．ただし，すくなくともひとつの θ に対し等号が成立しなければならない．

p は信頼水準，信頼限界または被覆確率という．

定義 8.2　すべての $\theta \in \Theta$ に対し

$$\mathbb{P}_\theta\{\theta \ge L(\boldsymbol{X})\} \ge p$$

となる統計量 $L(\boldsymbol{X})$ を θ に対する信頼係数 $100p\%$ 信頼下限といい，

$$\mathbb{P}_\theta\{U(\boldsymbol{X}) \ge \theta\} \ge p$$

となる統計量 $U(\boldsymbol{X})$ を θ に対する信頼係数 $100p\%$ 信頼上限という．

$L(\boldsymbol{X})$ を θ に対する $100p_1\%$ 信頼下限とし，$U(\boldsymbol{X})$ を θ に対する $100p_2\%$ 信頼上限で $L(\boldsymbol{X}) < U(\boldsymbol{X})$ したとき，区間 $[L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})]$ は θ に対する信頼係数 $100p\%$ の信頼区間となる．ただし，$p = p_1 + p_2 - 1$ である．

例 8.1　$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を独立同一に正規分布 $N(\mu, 1)$ に従う確率変数とする．このとき，$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従い，

$$\mathbb{P}_\mu\{-1.96 \le \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \le 1.96\} = 0.95$$

となる．ただし，$\bar{X}_n = (1/n)\sum_{i=1}^n X_i$ である．事象 $\{-1.96 \le \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \le 1.96\}$ は $\{\bar{X}_n - 1.96/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{X}_n + 1.96/\sqrt{n}\}$ に等しいので，

$$\mathbb{P}_\mu\left[\bar{X}_n - \frac{1.96}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}_n + \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right] = 0.95$$

となる．したがって，$[\bar{X}_n - 1.96/\sqrt{n}, \bar{X}_n + 1.96/\sqrt{n}]$ は μ に対する信頼係数 95% の信頼区間となる．

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を独立同一に平均 μ，分散 1 の分布に従う確率変数とする．このとき，中心極限定理から $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に漸近的に従うことがわかるので，n が十分大きいとき

$$\mathbb{P}_\mu\{-1.96 \le \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \le 1.96\} \approx 0.95$$

となる．$[\bar{X}_n - 1.96/\sqrt{n}, \bar{X}_n + 1.96/\sqrt{n}]$ は μ に対する信頼係数 95% の近似信頼区間となる．

2　ピボット法

$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を実数値母数 $\theta\,(\theta \in \Theta)$ に依存する同時分布に従う確率変数ベクトルとし，$g(\boldsymbol{X}, \theta)$ を確率変数とし，その分布は θ には依存しないとする．すなわち，

$$\mathbb{P}_\theta\{g(\boldsymbol{X}, \theta) \le x\} = G(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

は分布関数で θ に依存しないものである．以後では，簡単なために $G(x)$ は $\{x \in \mathbb{R} : G(x) > 0\}$ 上で狭義単調増加の分布関数と仮定する．しがたって，うまく実数 a, b をとり

$$\mathbb{P}_\theta\{a \le g(\boldsymbol{X}, \theta) \le b\} = p$$

とできる．さらに，事象 $\{a \le g(\boldsymbol{X}, \theta) \le b\}$ を変形して，

$$\mathbb{P}_\theta[L(\boldsymbol{X}) \le \theta \le U(\boldsymbol{X})] = p$$

なる $L(\boldsymbol{X})$, $U(\boldsymbol{X})$ を見つけることができることが期待できる．このように，信頼区間を構成するにあたり利用する確率変数 $g(\boldsymbol{X}, \theta)$ を θ に対するピボットという．要点は $g(\boldsymbol{X}, \theta)$ の分布が未知母数 θ に依存しないことである．

例 8.2 $X_1, X_2, \ldots, X_n\,(n \geq 2)$ は独立同一に $[0, \theta]$ 上の一様分布に従うとする．ただし，$\theta > 0$ である．このとき，θ の最尤推定量は $X_1, X_2, \ldots, X_n\,(n \geq 2)$ の最大値 $X_{(n)}$ である．また，$X_{(n)}/\theta$ の分布関数は

$$G(x) \equiv \mathbb{P}_\theta\{X_{(n)}/\theta \leq x\} = x^n\,\mathbb{I}_{[0,\,1]}(x) + \mathbb{I}_{(1,\,\infty)}(x)$$

である．したがって，$X_{(n)}/\theta$ は θ に対するピボットとなる．信頼係数 $100p\%$ の信頼区間を見つけるためには

$$\mathbb{P}_\theta\left[a \leq \frac{X_{(n)}}{\theta} \leq b\right] = p$$

なる a と b を見つければよい．$X_{(n)}/\theta$ の確率密度関数は単調増加なので，$a = (1-p)^{1/n}$ と $b = 1$ とすれば，区間 $[a, b]$ は最短[1]になる．さらに，信頼係数が $100p\%$ の信頼区間 $[X_{(n)}/a, X_{(n)}/b]$ の中で $[X_{(n)}, X_{(n)}/(1-p)^n]$ が最短となること[2]もわかる．

例 8.3 $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ が独立同一に母数 θ の指数分布

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta x}\,\mathbb{I}_{(0,\,\infty)}(x)$$

---

[1] $[(1-p)^{1/n}, 1]$ が最短区間になることは以下のことからわかる．$X_{(n)}/\theta$ の確率密度関数を $f(x)$ とする．$b < 1$ と仮定すれば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+1-b} f(x)\,dx + \int_{a+1-b}^b f(x)\,dx - \int_b^1 f(x)\,dx + \int_b^1 f(x)\,dx \leq \int_{a+1-b}^b f(x)\,dx$$

となる．なぜならば，$f(x)$ の単調性から

$$\int_a^{a+1-b} f(x)\,dx - \int_b^1 f(x)\,dx \leq 0$$

からわかる．あとは，

$$\mathbb{P}_\theta\left[a \leq \frac{X_{(n)}}{\theta} \leq 1\right] = G(1) - G(a) = 1 - a^n = p$$

に注意すればよい．

[2] $ab \leq 1$ から $1/b - 1/a = (b-a)/(ab) > 1 - (1-p)^p$ となることよりわかる．

に従うとする．ただし，$\theta > 0$ である．このとき，$2\theta X_1$ は自由度 2 のカイ 2 乗分布[3] に従うので，$2\theta \sum_{i=1}^{10} X_i$ は自由度 20 のカイ 2 乗分布に従う．したがって，たとえば，信頼係数 90% の信頼区間は

$$\mathbb{P}_\theta \left[a \leq 2\theta \sum_{i=1}^{10} X_i \leq b \right] = 0.90$$

なる a, b を見つけることになる．これは

$$\mathbb{P}_\theta \left[2\theta \sum_{i=1}^{10} X_i \leq a \right] = 0.05, \qquad \mathbb{P}_\theta \left[2\theta \sum_{i=1}^{10} X_i \leq b \right] = 0.95$$

から $a = 10.85, b = 31.41$ となる．したがって，

$$\left[\frac{5.425}{\sum_{i=1}^{10} X_i}, \frac{15.705}{\sum_{i=1}^{10} X_i} \right]$$

となる．しかし，カイ 2 乗分布の確率密度関数はモードに関して非対称なので，これは最短の区間ではない．実際，

$$\left[\frac{4.893}{\sum_{i=1}^{10} X_i}, \frac{14.938}{\sum_{i=1}^{10} X_i} \right]$$

が最短となることが知られている．

未知母数を $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$ とし，θ_1 に対する信頼区間を構成することを考える．$g(\boldsymbol{X}, \theta_1)$ は θ_1 のみに依存する確率変数で $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_p$ には依存しないとする．さらに，$g(\boldsymbol{X}, \theta_1)$ の分布は $\boldsymbol{\theta}$ には依存しないとする．すなわち

$$\mathbb{P}_\mu \{ g(\boldsymbol{X}, \theta_1) \leq x \} = G(x)$$

とする．このような場合，ピボット $g(\boldsymbol{X}, \theta_1)$ を用いて θ_1 の信頼区間を構成することができる．

---

[3] 自由度 k のカイ 2 乗分布の確率密度関数は

$$\frac{1}{\Gamma(k/2)} \left(\frac{1}{2} \right)^{k/2} x^{(k/2)-1} e^{-(1/2)x} \, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$$

であるので，自由度 2 のカイ 2 乗分布の密度関数は $(1/2)e^{-(1/2)x}$ となることに注意．

例 8.4 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を独立同一に正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数とする．ここで，μ, σ^2 は未知とする．μ に対する信頼区間を求めよう．そのために，

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S}$$

とおく．ただし

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

である．$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/S$ は自油度 $(n-1)$ の t 分布[4]に従いので，この分布は μ, σ^2 に依存しないので，μ のピボットとなる．

また，σ^2 の信頼区間を構成するために

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

となるので，σ^2 のピボットとなる．

多くの場合には，ピボットの分布を厳密に求めることが難しい．しかし，ピボットの分布の近似（漸近分布）を求めることができる．すなわち，ピボット $g(\boldsymbol{X}, \theta)$ に対し

$$\mathbb{P}_\theta\{g(\boldsymbol{X}, \theta) \le x\} \approx G(x)$$

なる θ に依存しない分布関数 $G(x)$ を求めることができることがおおい．以下は近似がうまくいくために，標本数 n は大きいと仮定し，大きさ n のランダム標本（i.i.d. 標本）が得られる場合を考える．$\hat{\theta}_n$ は n 個の標本に基づく θ の推定量とし，その漸近分布が平均 θ，分散 $\sigma_n^2(\theta)$ の正規分布と仮定する．すなわち，

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n(\theta)} \xrightarrow{L} N(0, 1)$$

[4]自由度 k の t 分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)\sqrt{\pi k}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{(k+1)/2}}$$

で与えられる．

とする[5]．さらに，$\sigma(\theta)$ に $\hat{\theta}_n$ を代入したもの

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n(\hat{\theta}_n)}$$

も漸近的に標準正規分布に従うことが多くの場合保証されるので，これをピボットとして用いればよい．これらのことより

$$\mathbb{P}_\theta\{-z_{p/2} \leq \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n(\hat{\theta}_n)} \leq z_{p/2}\} \approx 1 - p$$

を得る．ただし，$z_{p/2}$ は $1-\Phi(z_{p/2}) = p/2$ をみたす点である．したがって，θ に対する信頼係数 $100(1-p)\%$ の近似信頼区間は $[\hat{\theta}_n - z_{p/2}\sigma_n(\hat{\theta}_n), \hat{\theta}_n + z_{p/2}\sigma_n(\hat{\theta}_n)]$ で与えられる．

例 8.5　X を二項分布 $Bin(n, \theta)$ に従う確率変数とする．ただし，$\theta\,(0 < \theta < 1)$ は未知とする．このとき，θ の最尤推定量は $\hat{\theta} = X/n$ である．n が十分大きければ，$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)/\sqrt{\theta(1-\theta)}$ は近似的に標準正規分布に従うことが中心極限定理よりわかる．したがって，θ に対する信頼係数 95% の近似信頼区間は

$$\mathbb{P}_\theta\left[-1.96 \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \leq 1.96\right] = \mathbb{P}_\theta\left[\frac{n(\hat{\theta} - \theta)^2}{\theta(1-\theta)} \leq (1.96)^2\right] \approx 0.95$$

より構成できる．したがって，θ に対する信頼係数 95% の近似信頼区間は

$$\{g(tO := n(\hat{\theta}_n - t)^2 - (1.96)^2 t(1-t) \leq 0\}$$

となる．$g(t) = 0$ の解は

$$t = \frac{\hat{\theta}_n + (1.96)^2/(2n) \pm 1.96\{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)/n + (1.96)^2/(4n^2)\}^{1/2}}{1 + (1.96)^2/n}$$

となる．したがって，信頼区間はこの 2 点を両端にもつ区間となる．または，ピボットとして

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sqrt{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}}$$

[5] これはすべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$n \to \infty$ のとき

$$\mathbb{P}_\theta\left\{(\hat{\theta}_n - \theta)/\sigma_n(\theta)\right\} \to \Phi(x)$$

となることである．ただし，$\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積分布関数である．

を利用すれば，θ に対する信頼係数 95% の近似信頼区間は

$$\left[\hat{\theta}_n - 1.96\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}},\ \hat{\theta}_n + 1.96\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}}\right]$$

となる．n が大きいときには，このふたつの信頼区間は違いは小さい．

3　演習問題

問題 8.1　$X_1, X_2, \ldots, X_n (n \geq 2)$ を確率密度関数

$$f_X(x|\,\mu) = e^{-(x-\mu)} I_{[\mu,\,\infty)}(x) \qquad \mu > 0$$

からの大きさ n のランダム標本とする．ただし，$I_A(x)$ は指示関数とする．すなわち，集合 A に対し，$x \in A$ ならば，$I_A(x) = 1$，$x \notin A$ ならば，$I_A(x) = 0$ である．

(1) X_1 の累積分布関数を求めよ．

(2) $Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ としたとき，Y の確率密度関数は

$$f_Y(y|\,\mu) = ne^{-n(y-\mu)} I_{[\mu,\,\infty)}(y)$$

で与えられることを示せ．

(3) 信頼係数 $100p\%\,(0 < p < 1)$ の μ の信頼区間を構成せよ．ただし

$$\mathbb{P}_\mu(Y - \mu \leq a) = \frac{1-p}{2}, \qquad \mathbb{P}_\mu(Y - \mu \geq b) = \frac{1-p}{2}$$

をみたす点 $a, b\,(a < b)$ を利用する．

問題 8.2　$X_1, X_2, \ldots, X_n\,(n \geq 2)$ を $(0, \theta)$ 上の一様分布からのランダム標本とする．ただし，$\theta > 0$ である．また，$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の順序統計量とし，r を $1 \leq r \leq n-1$ なる任意の自然数とする．このとき，$X_{(r)}/\theta$ をピボットとして，信頼係数 $100p\%\,(0 < p < 1)$ の θ の信頼区間を構成せよ．

ヒント 1：$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\,(n \geq 2)$ は独立同一分布に従い，連続な分布関数 $F_Y(y)$（確率密度関数を $f_Y(y)$ とする）を持つとき，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ の r 番目の順序統計量 $Y_{(r)}$ の確率密度関数は

$$f_Y(y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f_Y(y)[F_Y(y)]^{r-1}[1-F_Y(y)]^{n-r}$$

となる．

ヒント 2：確率変数 Z はパラメータ (α, β) のベータ分布に従うとする：すなわち，Z の確率密度関数は

$$f_Z(z) = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} I_{(0,\,1)}(x)$$

である．ただし，$\alpha > 0, \beta > 0$ である．このとき，$q\,(0 < q < 1)$ に対して，$u_q(\alpha, \beta)$ と $l_q(\alpha, \beta)$ を

$$\int_{u_q(\alpha,\,\beta)}^{1} f_Z(z)\,dz = q, \qquad \int_0^{l_q(\alpha,\,\beta)} f_Z(z)\,dz = q$$

をみたすものとする．