今野　(2011 年 12 月 06 日)

情報統計学の問題 (その 3) の解答例

$\boxed{\text{問題 1}}$　確率変数 X は母数 $\theta\,(0<\theta<1)$ のベルヌーイ試行に従うとする.

$$\mathbb{P}_\theta(X=x)=f_X(x|\,\theta)=\begin{cases}\theta & (x=1),\\ 1-\theta & (x=0),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 推定量 $t_1=t_1(X)=X$ は θ の不偏推定量か？

(2) 推定量 t_1 の $\mathrm{MSE}(\theta,\,t_1)=\mathbb{E}_\theta[(t_1(X)-\theta)^2]$ を求めよ．また，θ を横軸，MSE を縦軸としてグラフを描け.

(3) 推定量 $t_2=t_2(X)=\dfrac{1}{2}X+\dfrac{1}{4}$ は θ の不偏推定量か？

(4) 推定量 t_2 の $\mathrm{MSE}(\theta,\,t_2)=\mathbb{E}_\theta[(t_2(X)-\theta)^2]$ を求めよ．また，(2) のグラフに $\mathrm{MSE}(t_2,\,\theta)$ を描け.

解答. (1)

$$\mathbb{E}_\theta[t_1(X)]=\mathbb{E}_\theta[X]=\sum_{x=0,\,1}xf(x|\,\theta)=0\times f(0|\,\theta)+1\times f(1|\,\theta)=0\times(1-\theta)+1\times\theta=\theta$$

となるので，t_1 は θ の不偏推定量.

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\theta,\,t_1) &= \mathbb{E}_\theta[(t_1(X)-\theta)^2]\\ &= \sum_{x=0,\,1}(t_1(x)-\theta)^2f(x|\,\theta)\\ &= (t_1(0)-\theta)^2f(0|\,\theta)+(t_1(1)-\theta)^2f(1|\,\theta)\\ &= (0-\theta)^2(1-\theta)+(1-\theta)^2\theta\\ &= \theta(1-\theta)\{\theta+1-\theta\}=\theta(1-\theta)\qquad(0<\theta<1).\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[t_2(X)] &= \mathbb{E}_\theta\left[\frac{1}{2}X+\frac{1}{4}\right]\\ &= \sum_{x=0,\,1}\left\{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right\}f(x|\,\theta)\\ &= \left\{\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{4}\right\}f(0|\,\theta)+\left\{\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{4}\right\}f(1|\,\theta)\\ &= \frac{1}{4}\times(1-\theta)+\frac{3}{4}\theta\\ &= \frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\neq\theta\end{aligned}$$

となるので，t_2 は θ の不偏推定量でない．
(4) $\mathbb{VAR}_\theta[X] = \theta(1-\theta)$ と MSE の書き換え公式（定理 6.1）および分散作用の性質を使えば，

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(\theta,\, t_2) &= \mathbb{E}_\theta[(t_2(X)-\theta)^2] \\
&= \mathbb{VAR}_\theta[t_2(X)] + \{\mathbb{E}_\theta[t_2(X)]-\theta\}^2 \\
&= \mathbb{VAR}_\theta\left[\frac{1}{2}X+\frac{1}{4}\right] + \left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}-\theta\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{VAR}_\theta[X] + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\theta\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\theta(1-\theta)+\frac{1}{16}-\frac{\theta}{4}+\frac{1}{4}\theta^2 = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$