

計画数学演習の問題(その 2)

問題 40 X と Y の同時確率密度関数が

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy - 2x - 2y + 2 & (0 < x, y < 1), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられとする .

- (i) Y の平均と分散を求めよ .
- (ii) X の周辺確率密度関数を求めよ .
- (iii) X と Y の共分散と相関係数を求めよ .
- (iv) $\hat{Y} = \mathbb{E}[Y|X]$ を求めよ (ヒント : 答えは X の関数となる . また , $\mathbb{E}[Y|X]$ は $g(x) = \mathbb{E}[Y|x]$ としたとき , $\mathbb{E}[Y|X] = g(X)$ で定める .)
- (v) $\tilde{Y} = a + bX$ (a と b は定数) としてとき , $\mathbb{E}\{[\tilde{Y} - Y]^2\}$ を最小にする a と b を $\mathbb{E}[X]$ 、 $\mathbb{E}[Y]$ 、 $\mathbb{E}[XY]$ 、および $\mathbb{E}[X^2]$ で表現した後、それを求めよ .

問題 41 X と Y は互いに独立な確率変数でそれぞれは正規分布 $N(0, 1)$ と $N(0, 4)$ に従うとする .

$$U = X + Y, \quad V = X - Y$$

とおく .

- (i) U と V の同時確率密度関数を求めよ .
- (ii) U と V の分散行分散行列

$$\begin{pmatrix} \text{VAR}[U] & \text{COV}[U, V] \\ \text{COV}[U, V] & \text{VAR}[V] \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ .

問題 42 X と Y 互いに独立な確率変数でそれぞれは標準正規正規分布に従うとし ,

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y), \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$$

とおく .

- (i) U と V の期待値と U と V の分散行分散行列

$$\begin{pmatrix} \text{VAR}[U] & \text{COV}[U, V] \\ \text{COV}[U, V] & \text{VAR}[V] \end{pmatrix}$$

を求めよ .

- (ii) U と V の同時確率密度関数を求めよ .