

## 計画数学演習の問題 (その 3)

**問題 43** 母集団分布がそれぞれつぎの場合について標本の大きさが  $n$  のランダム標本の同時確率密度関数または同時確率関数を書け .

- (1) 母数  $p (0 < p < 1)$  のベルヌーイ分布
- (2) 母数  $\lambda (\lambda > 0)$  のポアソン分布
- (3) 区間  $(a, b)$  上の一様分布 . ただし ,  $a < b$  である .
- (4) 平均  $\mu$  , 分散  $\sigma^2 (< \sigma < \infty)$  の正規分布 .
- (5) 母数  $\lambda (\lambda > 0)$  の指数分布

**問題 44** 平均  $\mu$  , 分散  $\sigma^2 (0 < \sigma < \infty)$  の母集団分布からの標本の大きさが  $n$  のランダム標本を  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 4)$  とする . つぎの統計量の期待値と分散を求めよ .

- (1)  $T_1 = X_1$
- (2)  $T_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$
- (3)  $T_3 = \sum_{i=1}^n X_i$
- (4)  $T_4 = \frac{1}{n} T_3$
- (5)  $T_5 = 12$

**問題 45** 平均  $\mu$  , 分散  $\sigma^2 (0 < \sigma < \infty)$  の母集団分布からの標本の大きさが  $n$  のランダム標本を  $X_1, X_2, \dots, X_n$  とする . 統計量

$$T(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$$

を考える . ただし ,  $a_i, i = 1, 2, \dots, n$  は既知の定数とする . 簡単に  $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$  を  $T$  と書くことにする .

- (1)  $T$  の平均  $\mathbb{E}[T]$  と分散  $\text{VAR}[T]$  を求めよ .
- (2)  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$  のとき

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n \left( a_i - \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n}$$

を示せ .

- (3)  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$  という条件のもとで  $T$  の分散を最小にする  $a_1, a_2, \dots, a_n$  を求めよ.

**問題 46**  $X_1, X_2$  は区間  $(0, 2)$  上の一様分布からの標本の大きさが 2 のランダム標本とする. 統計量

$$T_1 = X_1 + X_2, \quad T_2 = X_1 - X_2$$

を考える.

- (1)  $T_1$  の期待値  $E[T_1]$  と分散  $\text{VAR}[T_1]$  を求めよ.
- (2)  $T_2$  の期待値  $E[T_2]$  と分散  $\text{VAR}[T_2]$  を求めよ.
- (3)  $T_1, T_2$  の同時確率密度関数を求めよ.
- (4)  $T_1$  の確率密度関数を求めよ.

**問題 47**

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 = \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - X_j)^2$$

を示せ. ただし,  $\bar{X}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$  である.

**今後のレポートの問題の質問の受付について**

レポート問題についての質問をする場合は, レポート問題を熟考したうえで, レポート問題のどこの何がわからないかを質問してください. できるだけ絞って質問してください. また, 質問への答えは数研前に掲示およびホームページに載せることにし, レポート締め切り前は個別に与えるヒントは最小限にとどめる方針にします. ただし, 黒板で問題を解答するよう指名されたものが当該問題にする質問に対しては上記方針を適応されません. また, レポート提出時に解けない問題はわからない点を丁寧に記述したのもも評価することにします. なお, レポート問題以外の質問や締め切り後のレポート問題についての質問は従来通りです.