計画数学演習の問題 (その 4)

$\boxed{\text{問題 48}}$　以下を示せ．

(1) Z が標準正規分布に従うとき，$X = Z^2$ は自由度 1 のカイ自乗分布に従う．

(2) W が母数 r, λ のガンマ分布に従うとは W が確率密度関数

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda w)^{r-1}e^{-\lambda w} & w > 0, \\ 0 & ((\text{その他}) \end{cases}$$

を持つときをいう．ただし，$r > 0, \lambda > 0$ である．W の積率母関数は

$$M_W(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r, \qquad t < \lambda$$

となることを示せ．

(3) X が自由度 p のカイ自乗分布に従うとき，X の積率母関数は

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^r, \qquad t < \frac{1}{2}$$

となることを示せ．

(4) X_1 と X_2 は互いに独立とし，各 $X_i, i = 1, 2$ は自由度 p_i カイ自乗分布に従うとき，$X_1 + X_2$ は自由度 $p_1 + p_2$ のカイ自乗分布に従うことを示せ．

$\boxed{\text{問題 49}}$　X と Y は独立にそれぞれ正規分布 $N(\mu, \sigma_X^2)$ と $N(\mu, \sigma_Y^2)$ に従うとときき，

$$\mathbb{COV}\left[\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}X + \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}Y, X - Y\right] = 0$$

を示せ．

$\boxed{\text{問題 50}}$　$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は正規分布 $N(\mu, 1)$ からの標本の大きさ n のランダム標本とする．ただし，$n \geq 2$ とする．統計量

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2, \qquad \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

を考える．

(1) $n \geq 3$ のとき，等式

$$(n-1)S_n^2 = (n-2)S_{n-1}^2 + \left(\frac{n-1}{n}\right)(X_n - \bar{X}_{n-1})^2$$

を示せ．$n = 2$ のときは

$$S_2^2 = \frac{1}{2}(X_2 - X_1)^2$$

を示せ．

(2) $X_1 - X_2$ の分布を求めよ．

(3) $X_1 + X_2$ と $X_1 - X_2$ は独立であることを示せ．

(4) S_2 は自由度 1 のカイ自乗分布に従うことを示せ．

(5) $n = k$ のとき，$(k-1)S_k^2$ は自由度 $k-1$ のカイ自乗分布に従い，S_k^2 と $\bar{X}_k$ は独立であると仮定したとき，以下を示せ．ただし，$k \geq 2$ である．

(5a) $X_{k+1} - \bar{X}_k$ の期待値 $\mathbb{E}[X_{k+1} - \bar{X}_k]$ と分散 $\mathbb{VAR}[X_{k+1} - \bar{X}_k]$ を求めよ．

(5b) $\sqrt{\frac{k}{k+1}}(X_{k+1} - \bar{X}_k)$ は標準正規分布 $N(0,\, 1)$ に従うことを示せ．

(5c) $\frac{k}{k+1}(X_{k+1} - \bar{X}_k)^2$ は自由度 1 のカイ自乗分布に従うことを示せ．

(5d) $n = k + 1$ のとき，

$$kS_{k+1}^2 = (k-1)S_k^2 + \left(\frac{k}{k+1}\right)(X_{k+1} - \bar{X}_k)^2$$

は自由度 k のカイ自乗分布に従うことを示せ．

(5e) X_{k+1} と $\bar{X}_k$ はそれぞれ独立で正規分布 $N(\mu,\, 1)$ と $N(\mu,\, 1/k)$ に従うことに注意して，

$$\mathbb{COV}[\frac{k}{k+1}\bar{X}_k + \frac{1}{k+1}X_{k+1},\, \bar{X}_k - X_{k+1}] = 0$$

を示めせ．したがって，$\frac{k}{k+1}\bar{X}_k + \frac{1}{k+1}X_{k+1}$ と $\bar{X}_k - X_{k+1}$ は正規分布に従うので，$\frac{k}{k+1}\bar{X}_k + \frac{1}{k+1}X_{k+1}$ と $\bar{X}_k - X_{k+1}$ は独立となる．さらに，

$$\bar{X}_{k+1} = \frac{k}{k+1}\bar{X}_k + \frac{1}{k+1}X_{k+1}$$

から S_{k+1}^2 と $\bar{X}_{k+1}$ は独立であることがわかる．