

計画数学演習の問題 (その 5)

問題 51 X_1, X_2, X_3, X_4 を確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1, \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

からの標本の大きさが 4 のランダム標本とし, $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, X_{(4)}$, をその順序統計量とする.

(1) $X_{(4)}$ の確率密度関数を求めよ.

(2) $X_{(1)}$ の確率密度関数を求めよ.

問題 52 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を確率密度関数 $f_X(x)$ からの標本の大きさが n ($n \geq 2$) のランダム標本とし, $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ をその順序統計量とする. また, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ とする. このとき,

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}, \quad T = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}$$

としたとき, R と T の同時確率密度関数は

$$f_{R,T}(r, t) = \begin{cases} n(n-1) [F(t + \frac{r}{2}) - F(t - \frac{r}{2})]^{n-2} f(t - \frac{r}{2}) f(t + \frac{r}{2}) & r > 0, \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

で与えられることを示せ.

問題 53 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を $(0, 1)$ 上の一様分布¹ からの標本の大きさが n ($n \geq 2$) のランダム標本とし, $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ をその順序統計量とする. さらに,

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}, \quad T = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}$$

とする.

(1) R と T の同時確率密度関数は

$$f_{R,T}(r, t) = \begin{cases} n(n-1)r^{n-2} & 0 < r < 1, \frac{r}{2} < t < 1 - \frac{r}{2} \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

で与えられることを示せ.

¹確率密度関数は

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

(2) R の周辺確率密度関数は

$$f_R(r) = \begin{cases} n(n-1)r^{n-2}(1-r) & 0 < r < 1, \\ 0 & \text{(その他の場合)} \end{cases}$$

となることを示せ. さらに,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_R(r) dr = 1$$

を示せ.

問題 54 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を母数 $\lambda (\lambda > 0)$ の指数分布²からの標本の大きさが $n (n \geq 2)$ のランダム標本とし, $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ をその順序統計量とする.

- (1) $X_{(1)}$ の確率密度関数を求めよ.
- (2) $X_{(n)}$ の確率密度関数を求めよ.
- (3) $X_{(1)}$ と $X_{(n)}$ の同時確率密度関数を求めよ.
- (4) $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ と $T = (X_{(1)} + X_{(n)})/2$ の確率密度関数を求めよ.
- (5) R の周辺確率密度関数を求めよ.

²確率密度関数は

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0, \\ 0 & \text{(その他の場合)} \end{cases}$$

で与えられる.