はじめに

このノートは 2004 年後期開講の大学院講義録である.

目 次

第1章　測度論からの準備

1.1　可測空間

Ω を空でない集合とする．

定義 1.1 Ω の部分集合族 $\mathscr{F}$ がつぎをみたすとき，σ–加法族という．
(1) $\Omega \in \mathscr{F}$
(2) $A \in \mathscr{F}$ ならば，$A^c \in \mathscr{F}$
(3) $A_n \in \mathscr{F}\,(n = 1, 2, \ldots)$ ならば，$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

注意 1.1 (1) $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{F}$ ならば，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$ である．
(2) $\emptyset \in \mathscr{F}$ である．

命題 1.1 (1) $\mathscr{F}_s\,(s \in S \neq \emptyset)$ を Ω 上の σ-加法族とする．このとき，$\bigcap_{s \in S} \mathscr{F}_s$ も σ–加法族である．
(2) $\mathcal{C}$ を Ω の部分集合族とする．$\mathcal{C}$ を含む最小の σ-加法族が唯一存在する．これを $\mathcal{C}$ のよって生成される σ–加法族とよび，$\sigma(\mathcal{C})$ と書く．

証明　(1) と (2) は西尾 28 ページを参照.　□

定義 1.2 一般にの位相空間 S に対し，S の開集合全体を含む最小の σ–加法族をボレル集合族(1-1)といい，$\mathcal{B}(S)$ と書く．

例 1.1 定義より，$\mathbb{R}$ のボレル集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ の開集合全体 $\mathcal{C}$ により生成される．すなわち，$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$ である．しかし，$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を生成する集合族は他にもいくつかある．たとえば，$\mathcal{E} = \{(-\infty, r] : r \in \mathbb{R}\}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の生成集合族である．これを示すためには，$\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{C})$ と $\sigma(\mathcal{E}) \supset \sigma(\mathcal{C})$ を示せばよい．

まず，$\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{C})$ を示そう．そのために，$\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{C})$ を示せば十分(1-2)である．これは，$(-\infty, r] = \cap_{n=1}^{\infty}(-\infty, r + n^{-1})$ と表現できることからわかる．

つぎに，$\sigma(\mathcal{E}) \supset \sigma(\mathcal{C})$ を示すために $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{E})$ を示そう．これは，$\mathbb{R}$ 上の任意の開集合は開区間の可算個の和として表現できることと任意の開区間は $(a, b) = (-\infty, b) \cap (-\infty, a]^c$ と $(-\infty, b) = \cup_{n=1}^{\infty}(-\infty, b - n^{-1}]$ から構成できることからわかる．よって，$\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{E})$ は示された．

定義 1.3 μ が $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の測度とは
(1) $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ かつ $\mu(\emptyset) = 0$.
(2) $A_n \in \mathscr{F}\,(n \in \mathbb{N})$ が互いに素ならば，

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

のときをいう．$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間という．

定義 1.4 (1) $\mu(\Omega) = 1$ ならば，μ を確率測度という. 確率測度をとくに $\mathbb{P}$ と記すことにする．
(2) 測度 μ が σ–有限であるとは，$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ かつ すべての $n \geq 1$ に対して $\mu(A_n) < \infty$ なる $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{F}$ が存在することである．

命題 1.2 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする.
(1) 増大列 $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{F}$ に対して

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

が成立する.
(2) 減少列 $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{F}$ に対して

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

が成立する.

証明 (1) $A_0 = \emptyset$ と記す.

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \mu\{\cup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus A_{n-1})\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) \qquad (\sigma\text{–加法性}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \setminus A_{i-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\{\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \setminus A_{ni-1})\} \qquad (\text{有限加法性}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

(2) $B_n = A_1 \setminus A_n = A_1 \cap A_n^c$ とおけば, B_n は増大列となる.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) &= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \\
&= \mu\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 \cap A_n^c)\} \\
&= \mu\{A_1 \bigcap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)\} \\
&= \mu\{A_1 \bigcap \{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\}^c\} \\
&= \mu(A_1) - \mu\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\} \qquad (\text{有限加法性})
\end{aligned}$$

一方, 有限加法性から $\mu(A_1) = \mu(A_1 \setminus A_n) + \mu(A_n)$ なので,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

このふたつの式より (2) は証明された. □

定義 1.5 $A \in 2^{\Omega}$ に対し, 指示関数を

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定義する.

定義 1.6 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間とする．Ω の部分集合 A に対し，$A \subset E$ かつ $\mu(E) = 0$ を満たす $E \in \mathscr{F}$ が存在するとき，A を μ–零集合という．測度空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ に対し $\mathscr{F}$ がすべての μ–零集合を含むとき，$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ は完備測度空間(1-3)という．

1.2 単調族定理

定義 1.7 (1) $\mathcal{I}$ を Ω の部分集合族とする．$\mathcal{I}$ が π–系であるとは，共通集合を有限回とる操作に関して安定であるときをいう：すなわち

$$I_1, I_2 \in \mathcal{I} \Longrightarrow \mathcal{I}.$$

(2) $\mathcal{D}$ を Ω の部分集合族とする．$\mathcal{D}$ が λ–系であるとは，つぎをみたすときをいう．
(i) $\Omega \in \mathcal{D}$.
(ii) $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ かつ $D_1 \subset D_2$ ならば，$D_2 \setminus D_1 \in \mathcal{D}$.
(iii) $D_n \in \mathcal{D}\,(n \in \mathbb{N})$ かつ $D_n \supset D_{n+1}$ ならば，$\cup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$.

命題 1.3 Ω の部分集合族を $\mathcal{S}$ とする．このとき，つぎは同値である．
(1) $\mathcal{S}$ は π–系かつ λ–系である．
(2) $\mathcal{S}$ は σ–加法族である．

証明 (2) $\Longrightarrow$ (1) は明らか．(1) $\Longrightarrow$ (2) を示せばよい．$\mathcal{S}$ は π–系かつ λ–系とし，$S_1, S_2, T_n\,(n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{S}$ とする．このとき，$S_1^c := \Omega \setminus S_1 \in \mathcal{S}$ で

$$S_1 \cup S_2 := \Omega \setminus (S_1^c \cap S_2^c) \in \mathcal{S}$$

である．$U_n := \cup_{i=1}^{n} T_i \in \mathcal{S}$ となり，$U_n \uparrow \cup_{i=1}^{\infty} T_i$ より $\cup_{i=1}^{\infty} T_i \in \mathcal{S}$ がわかる． □

補題 1.1 $\mathcal{I}$ を Ω の部分集合族とし，$d(\mathcal{I})$ を $\mathcal{I}$ を含むすべての λ–系の共通部分とする．このとき，$\mathcal{I}$ が π–系ならば，$d(\mathcal{I})$ は λ–系となり，

$$d(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I})$$

となる．

証明 命題 1.3 より $d(\mathcal{I})$ が λ–系であることを示せばよい．そのために，

$$\mathcal{D}_1 := \{B \in d(\mathcal{I}) :\ B \cap C \in d(\mathcal{I}), \forall C \in \mathcal{I}\}$$

とおく．$\mathcal{I}$ は π–系だから，$\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{I}$ となる(1-4)．また，定義より $\mathcal{D}_1 \subset d(\mathcal{D}_1)$ となる．さらに，$\mathcal{D}_1$ は λ–系である(1-5)．$\mathcal{D}_1$ は $\mathcal{I}$ を含む λ–系なので，$\mathcal{D}_1 \supset d(\mathcal{I})$ となり，$\mathcal{D}_1 = d(\mathcal{I})$ がわかる．

つぎに，

$$\mathcal{D}_2 := \{A \in d(\mathcal{I}) :\ A \cap B \in d(\mathcal{I}), \forall B \in d(\mathcal{I})\}$$

とおく．定義より $\mathcal{D}_2 \subset d(\mathcal{I})$ となる．また，$\mathcal{D}_1 = d(\mathcal{I})$ より $\mathcal{D}_2 \supset \mathcal{I}$ である．さらに，$\mathcal{D}_2$ は λ–系であること(1-6)がわかるので，$\mathcal{D}_2 \supset d(\mathcal{I})$ である．したがって，$\mathcal{D}_2 = d(\mathcal{I})$ がわかる．よって，$d(\mathcal{I})$ は λ–系である． □

定理 1.1 $\mathcal{I}$ を Ω の部分集合族で π–系とする．$(\Omega, \mathscr{F})$ 上の確率測度 $\mathbb{P}_1$ と $\mathbb{P}_2$ は $\mathcal{I}$ 上で一致するものとする．このとき，$\sigma(\mathcal{I})$ 上で $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ となる．

証明 $\mathcal{D} := \{A \in \sigma(\mathcal{I}) : \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}$ とおけば，$\mathcal{D}$ は Ω 上の λ–系である(1-7)．$\mathcal{D}$ は λ–系で仮定より $\mathcal{D} \supset \mathcal{I}$ なので，補題 1.1 より $\mathcal{D} \supset \sigma(\mathcal{I})$ であるので，定理は証明された． □

定理 1.2 $\mathcal{H}$ を Ω から $\mathbb{R}$ への有界関数のつくるひとつの族で，以下の性質をみたすものとする．
(1) $\mathcal{H}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．
(2) 定数関数 1 は $\mathcal{H}$ の要素である．
(3) $h_n \in \mathcal{H}\,(n \in \mathbb{N})$ は非負関数列で，$h_n \uparrow h$ とする．h は Ω 上の有界関数ならば，$h \in \mathcal{H}$ である．
　このとき，もし $\mathcal{H}$ がある π–系 $\mathcal{I}$ のすべての定義関数を含むならば，$\mathcal{H}$ は Ω 上のすべての有界な $\sigma(\mathcal{I})$–可測な関数を含む．

証明 　$\mathcal{D} := \{H \supset \Omega :\ \mathbb{I}_H \in \mathcal{H}\}$ とする．(1)–(3) から $\mathcal{D}$ は λ–系である．また，$\mathcal{D}$ は π–系 $\mathcal{I}$ を含むから，$\mathcal{D} \supset \sigma(\mathcal{I})$ となる．
　h を $\sigma(\mathcal{I})$–可測関数で，ある自然数 K に対して，$0 \le h(x) \le K\,(\forall x \in \Omega)$ であるようなものとする．$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$h_n(x) := \sum_{i=0}^{K2^n} i2^{-n}\,\mathbb{I}_{A(n,\,i)}(x), \qquad A(n,\,i) = \{x :\, i2^{-n} \le f(x) < (i+1)2^{-n}\}$$

とおく．h は $\sigma(\mathcal{I})$–可測関数であるので，すべての $A(n,\,i) \in \sigma(\mathcal{I})$ となる．したがって，$\mathbb{I}_{A(n,\,i)}(x) \in \mathcal{H}$ となる．さらに，(1) から $h_n \in \mathcal{H}$ となる．しかし，$0 \le h_n \uparrow h$ だから $h \in \mathcal{H}$ となる．
　h が有界な $\sigma(\mathcal{I})$–可測関数のときは，$h = h^+ - h^-$ と書けることに注意する．ここで，$h^+ = \max(h,\,0)$, $h^- = \max(-h,\,0)$ である．うえのことから $h^+,\,h^- \in \mathcal{H}$ となるので，$h \in \mathcal{H}$ がわかる． □

1.3　可測関数と積分

定義 1.8 $(\Omega,\,\mathscr{F})$ を測度空間とする．Ω 上の実数値関数 X が任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}$$

のとき，$\mathscr{F}$–可測という．

命題 1.4 X が $\mathscr{F}$–可測関数であるための必要十分条件は $\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathcal{C}$ で $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ なるものに対し

$$X^{-1}(\mathcal{C}) = \{X^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\} \subset \mathscr{F}$$

が成立することである．

証明 　（$\Leftarrow$） は明ら．
（$\Rightarrow$）逆像 X^{-1} は集合の演算を保存するので

$$X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = X^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}))$$

となる．さらに，X が可測性なので，その定義から $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathscr{F}$ となる．よって，題意は示せた． □

注意 1.2 上の命題において，たとえば $\mathcal{C} = \{(-\infty,\,r] : r$ は有理数 $\}$ とすればよいことがわかる．

定義 1.9 確率空間 $(\Omega,\,\mathscr{F},\,\mathbb{P})$ 上で定義された可測関数を確率変数(1-8) という．

命題 1.5 $X,\,Y$ を可測関数とする．このとき，$X \pm Y$，XY，X/Y，$X^+ \equiv X\,\mathbb{I}\{X \ge 0\}$，$X^- \equiv -X\,\mathbb{I}\{X \le 0\}$，$|X|$，$g(X)$ も可測関数である．ただし，g は可測である．

証明 　略． □

命題 1.6 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は可測関数列とする．このとき，

$$\text{(i)} \sup_n X_n, \qquad \text{(ii)} \inf_n X_n \qquad \text{(iii)} \limsup_{n\to\infty} X_n \qquad \text{(iv)} \liminf_{n\to\infty} X_n \qquad \text{(v)} \lim_{n\to\infty} X_n$$

も可測である．

証明 (i) $\{\sup_n X_n \le x\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{X_n \le x\}$
(ii) $\inf X_n = -\sup(-X_n)$
(iii) $\limsup_{n\to\infty} X_n = \inf_n(\sup_{k\ge n} X_k)$
(iv) $\liminf_{n\to\infty} X_n = -\limsup_{n\to\infty}(-X_n)$
(v) $\lim_{n\to\infty} X_n$ が存在するならば，$\liminf_{n\to\infty} X_n = \limsup_{n\to\infty} X_n$ □

ここで，X を非負可測関数とする．このとき，

$$\begin{aligned} X_n &\equiv \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{4^n} \mathbb{I}\{X \ge \frac{1}{2^n}\} \\ &= 2^n\,\mathbb{I}\{X \ge 2^n\} + \sum_{i=1}^{4^n} \frac{i-1}{2^n}\,\mathbb{I}\{\frac{i-1}{2^n} \le X < \frac{i}{2^n}\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

とする．これより，X_n は各点で X に収束すること[(1-9)]がわかる．また，X_n は単調増加である[(1-10)]．この X_n を単関数とよぶ．

命題 1.7 非負実数値関数 X が可測であるための必要十分条件は X が (1.1) で定義された関数列 $\{X_n\}$ の極限であることである．

証明 □

定義 1.10 (1) $X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{I}_{A_i}$ $(x_i \ge 0, \cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega)$ に対し，

$$\int X\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i)$$

(2) $X \ge 0$ に対し

$$\int X\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int X_n\,d\mu$$

ただし，X_n は非負単関数の任意の増加列で $X_n \to X$ $(\mu - \text{a.e.})$ なるものである．
(3) 可測関数 X に対し，$\int X^+\,d\mu$ か $\int X^-\,d\mu$ のどちらか一方が有限ならば，

$$\int X\,d\mu = \int X^+\,d\mu - \int X^-\,d\mu$$

$\int X\,d\mu$ は存在する．
(4) $\int X\,d\mu$ が有限ならば，X は μ-可積分．

定義 1.11 X を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上の確率変数とし，X が $\mathbb{P}$–可積分のとき，

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)$$

とおき，$\mathbb{E}(X)$ を X の期待値という．

定義 1.12 可測関数列 $\{X_n\}$ が X にほとんどいたるところで収束するとは，ある零集合(1-11) N が存在し，すべての $\omega \in \Omega \setminus N$ に対し，$X_n(\omega) \to X(\omega)$ が成立すること(1-12)である．これを

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \qquad \mu\text{–a.e.} \qquad \text{または} \qquad X_n \to_{\text{ a.e.}} X$$

などと記す．特に，$\mu = \mathbb{P}$ のとき，$X \xrightarrow{a.s.} X$ と記し，X_n は X にほとんど確実に収束するという(1-13)．

命題 1.8 $\int X\,d\mu$，$\int Y\,d\mu$，$\int (X+Y)\,d\mu$ は存在すると仮定する．
(1) $\int (X+Y)\,d\mu = \int X\,d\mu + \int Y\,d\mu, \qquad \int cX\,d\mu = c\int X\,d\mu$
(2) $X \geq 0\,(\mu\text{–}a.e.)$ ならば(1-14)，$\int X\,d\mu \geq 0$; $X \geq Y\,(\mu\text{–}a.e.)$ ならば，$\int X\,d\mu \geq \int Y\,d\mu$; $X = Y\,(\mu\text{–}a.e.)$ ならば，$\int X\,d\mu = \int Y\,d\mu$
(3) X は可積分 $\Longleftrightarrow$ $|X|$ は可積分
Y は可積分とする．このとき，$|X| \leq Y\,(\mu\text{–}a.e.)$ ならば，$|X|$ も可積分．

証明 □

1.4 積分の収束定理

定理 1.3 （単調収束定理）$\{X_n\}$ を非負確率変数の非減少列とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int X_n\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty} X_n\,d\mu.$$

証明 □

定理 1.4 （Fatou の lemma）$\{X_n\}$ を非負確率変数列とする．このとき，

$$\liminf_{n\to\infty}\int X_n\,d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} X_n\,d\mu$$

である．

証明 □

定理 1.5 （有界収束定理）$|X_n| \leq Y\,(\mu\text{–}a.e.)$ かつ Y は可積分とし，$X_n \to_{\,a.e.} X$ とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int X_n\,d\mu = \int X\,d\mu.$$

証明 $Z_n = |X_n - X|$ と $Z = 2Y$ とおく．仮定より，$Z_n \to_{\,a.e.} 0$ と $Z_n \leq |X_n| + |X| \leq Z$ が成立する．よって，$Z - Z_n \geq 0$ に対し Fatou の補題を適用すれば，

$$\begin{aligned}\int Z\,d\mu &= \int \liminf_{n\to\infty}(Z - Z_n)\,d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\int (Z - Z_n)\,d\mu \\ &= \int Z\,d\mu - \limsup \int Z_n\,d\mu\end{aligned}$$

となり，

$$\limsup_{n\to\infty}\int Z_n\,d\mu = \limsup_{n\to\infty}\int |X - X_n|\,d\mu \leq 0$$

したがって,

$$\left|\int X_n\,d\mu - \int X\,d\mu\right| \le \int |X_n - X|\,d\mu \to 0$$

□

定理 1.6 f_n と f は μ–可測関数でつぎを満足するものとする.
(1) μ に関してほとんどいたるところで $f_n \to f$.
(2) ある $p \ge 1$ に対し,

$$\limsup_{n\to\infty}\int |f_n|^p d\mu \le \int |f|^p d\mu < \infty.$$

このとき,

$$\int |f_n - f|^p d\mu \to 0$$

が成立する.

証明 $a, b \ge 0$ に対して, $|a-b|^p \le 2^p|a|^p + 2^p|b|^p$ が成立することに注意すれば, ほとんどいたるところで

$$0 \le 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p - |f_n - f|^p \to 2^{p+1}|f|^p$$

が成り立つ. Fatou の補題から

$$\begin{aligned}
\int 2^{p+1}|f|^p d\mu &= \int \liminf_{n\to\infty}(2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p - |f_n - f|^p)d\mu \\
&\le \liminf_{n\to\infty}\int(2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p - |f_n - f|^p)d\mu \\
&\le \limsup_{n\to\infty}\int 2^p|f_n|^p d\mu + \int 2^p|f|^p d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int |f_n - f|^p d\mu \\
&\le 2^{p+1}\int |f|^p d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int |f_n - f|^p d\mu
\end{aligned}$$

がわかる. よって

$$\limsup_{n\to\infty}\int |f_n - f|^p d\mu \le 0$$

から

$$\int |f_n - f|^p d\mu \to 0$$

がわかる. □

補題 1.2 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ を確率空間, $\mathscr{G}$ を $\mathscr{F}$ の部分 σ–集合族とし, X を $\mathscr{G}$-可測確率関数とする. このとき, 任意の $B \in \mathscr{G}$ に対して,

$$\mathbb{E}\{X\,\mathbb{I}_B(X)\} = 0$$

が成立するならば, $X = 0\,(\mu\text{–}a.e.)$ である.

証明 どんな $\epsilon > 0$ に対しても, $\{X \ge \epsilon\} \in \mathscr{G}$ であることに注意すれば,

$$0 \le \epsilon\,\mathbb{P}\{X \ge \epsilon\} = \mathbb{E}\,[\epsilon\,\mathbb{I}_{\{X\ge\epsilon\}}] \le \mathbb{E}\,[X\,\mathbb{I}_{\{X\ge\epsilon\}}] = 0$$

となるので, $\mathbb{P}\{X \ge \epsilon\} = 0$ が成立する. 同様にすれば, $\mathbb{P}\{X \le -\epsilon\} = 0$ も成り立つことがわかる. したがって, どんな $\epsilon > 0$ に対しても

$$\mathbb{P}\{-\epsilon < X < \epsilon\} = 1$$

となる．

いま，$A_n = \{-1/n < X < 1/n\}$ とおけば，

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 \quad \text{かつ} \quad \{X = 0\} = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$$

となる．$\{A_n\}$ は減少列であることに注意すれば，

$$\mathbb{P}\{X = 0\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$$

となり，補題は証明された． □

1.5 絶対連続，Radon = Nikodim 定理

$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間とし，X を Ω 上の非負可測関数とする．任意の $A \in \mathscr{F}$ に対し

$$\nu(A) = \int_A X(\omega)\, d\mu(\omega) = \int X(\omega)\, \mathbb{I}_A(\omega)\, d\mu \tag{1.2}$$

とおく．X が μ–可積分ならば，ν は $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の別の測度となる．このとき，(1.2) によって定義される測度 ν は μ に関する密度 X をもつという．

定義 1.13 μ, ν を $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の測度とする．任意の $A \in \mathscr{F}$ に対し，

$$\mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0$$

が成立するとき，ν は μ に関して絶対連続であるといい，$\nu \ll \mu$ と記す．また，ν は μ に優越されるという．

定理 1.7 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ を σ–有限測度空間とし，ν は $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の測度で $\nu \ll \mu$ を満足する．このとき，非負可測関数 X が存在し，任意の $A \in \mathscr{F}$ に対し

$$\nu(A) = \int X(\omega)\, \mathbb{I}_A(\omega) d\mu(\omega)$$

とできる．さらに，

$$X \equiv \frac{d\nu}{d\mu}$$

は一意的(1-15)に定まる．X を μ に関するラドン=ニコディムの微分という．

証明 □

系 1.1 ν と μ は $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の σ–有限測度で $\nu \ll \mu$ とする．さらに，Z は可測関数とし，$\int Z\, d\mu$ が存在するとする．このとき，$A \in \mathscr{F}$ に対し

$$\int_A Z(\omega) d\nu(\omega) = \int_A Z(\omega) \frac{d\nu}{d\mu}(\omega)\, d\mu(\omega)$$

が成立する．

証明 <u>第一段階</u> $Z = \mathbb{I}_B\, (B \in \mathscr{F})$ と仮定する．このとき，ラドン=ニコディムの定理から

$$\int_A \mathbb{I}_B(\omega)\, d\nu(\omega) = \nu(A \cap B) = \int_{A\cap B} \frac{d\nu}{d\mu}(\omega)\, d\mu(\omega)$$

が成立する．

<u>第二段階</u>　$A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathscr{F}$ は互いに排反とし，$Z = \sum_{i=1}^m z_i \mathbb{I}_{A_i}\,(z_i \in \mathbb{R})$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}\int_A Z(\omega)\,d\nu(\omega) &= \sum_{i=1}^m \int_A \mathbb{I}_{A_i}\,d\nu(\omega)\\ &= \sum_{i=1}^m \int_A \mathbb{I}_{A_i}\frac{d\nu}{d\mu}(\omega)\,d\mu(\omega) \qquad (\text{第一段階から})\\ &= \int_A Z(\omega)\frac{d\nu}{d\mu}(\omega)\,d\mu(\omega).\end{aligned}$$

<u>第三段階</u>　$Z \geq 0$ と仮定する．Z_n を非負単関数列で $Z_n \uparrow Z$ とする[1-16]．このとき

$$\begin{aligned}\int_A Z(\omega)\,d\nu(\omega) &= \lim_{n\to\infty}\int_A Z_n(\omega)\,d\nu(\omega) \qquad (\text{単調収束定理})\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_A Z_n(\omega)\frac{d\nu}{d\mu}(\omega)\,d\mu(\omega) \qquad (\text{第二段階})\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_A Z(\omega)\frac{d\nu}{d\mu}(\omega)\,d\mu(\omega) \qquad (\text{単調収束定理}).\end{aligned}$$

<u>第四段階</u>　Z は可測関数とし，Z^+ と Z^- のどちらか一方は ν–可積分とする．このとき

$$\begin{aligned}\int_A Z(\omega)\,d\nu(\omega) &= \int_A Z^+(\omega)\nu(\omega) - \int_A Z^-(\omega)\,d\nu(\omega)\\ &= \int_A Z^+(\omega)\frac{d\nu}{d\mu}(\omega)\,d\mu(\omega) - \int_A Z^-(\omega)\frac{d\nu}{d\mu}(\omega)\,d\mu(\omega) \qquad (\text{第三段階})\\ &= \int_A Z(\omega)\frac{d\nu}{d\mu}(\omega)\,d\mu(\omega).\end{aligned}$$

□

例 1.2 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P})$ を確率空間とする．$\mathbb{P}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の測度 μ に関して密度 f をもつとすれば，

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(\omega)d\mu(\omega), \qquad A \in \mathscr{F}$$

と書ける．μ が $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度ならば，f を密度関数とよび，μ が $\mathbb{R}^n$ 上の計数測度ならば，f を頻度関数または mass function とよぶ．

定理 1.8 （Scheffé の定理）ν と $\nu_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ を $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の測度とし，f と f_n をそれぞれ ν と ν_n に関する密度とし，$\nu(\Omega) = \nu_n(\Omega) = 1$ とし，

$$f_n(\omega) \to f(\omega), \qquad \nu\text{–}a.e.$$

とする．このとき，

$$\sup_{A\in\mathscr{F}} |\nu_n(A) - \nu(A)| = \frac{1}{2}\int_\Omega |f_n(\omega) - f(\omega)|\,d\nu(\omega)$$

が成立する．

証明　$A \in \mathscr{F}$ に対し

$$|\nu_n(A) - \nu(A)| = |\int_A (f_n(\omega) - f(\omega))\,d\nu| \leq \int_A |f_n(\omega) - f(\omega)|\,d\nu \leq \int_\Omega |f_n(\omega) - f(\omega)|\,d\nu$$

が成立する．ここで，$g_n = f_n - f$ とおく．仮定より，$g_n \to 0\,(\nu\text{–a.e.})$ で $g_n^+ \le f$ となる(1-17)．f は可積分なので，有界収束定理を用いれば

$$\int g_n^+ \, d\nu \to 0$$

となる．しかし，

$$0 = \int (f_n - f)\, d\nu = \int g_n \, d\nu = \int (g_n^+ - g_n^1 \, d\nu$$

より

$$\int g_n^+ \, d\nu = \int g_n^- \, d\nu$$

を得る．よって，

$$\int |g_n| \, d\nu = \int g_n^+ \, d\nu + \int g_n^- \, d\nu = 2 \int g_n^+ \, d\nu$$

となる．あとは

$$\int g_n^+ \, d\nu \to 0$$

を示せば，定理は証明される．そのために，$B_n = \mathbb{I}\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) - f(\omega) \ge 0\}$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}
\sup_{A \in \mathscr{F}} |\nu_n(A) - \nu(A)| &\ge |\nu_n(B) - \nu(B)| \\
&= \int_{\{\omega : f_n(\omega) - f(\omega) \ge 0\}} (f_n(\omega) - f(\omega))\, d\nu(\omega) \\
&= \int_{\{\omega : g_n^+(\omega) \ge 0\}} g_n^+(\omega)\, d\nu \\
&= \frac{1}{2} \int |f_n(\omega) - f(\omega)|\, d\nu(\omega)
\end{aligned}$$

となる．しかし

$$\begin{aligned}
|\nu_n(A) - \nu(A)| &= |\int_A (f_n(\omega) - f(\omega))\, d\nu(\omega)| \\
&= \int_{A \cap B} (f_n(\omega) - f(\omega))\, d\nu(\omega) + \int_{A \cap B^c} (f_n(\omega) - f(\omega))\, d\nu(\omega) \\
&\le \int g_n^*(\omega)\, d\nu(\omega) \\
&= \frac{1}{2} \int |f_n(\omega) - f(\omega)|\, d\nu(\omega) \to 0
\end{aligned}$$

を仮定より得る．よって，定理は証明された． □

1.6 直積空間と Fubini 定理

定義 1.14 $\mathscr{F}$ の部分 σ–加法族 $\mathscr{F}_i\,(i \in I)$ が独立であるとは，I のすべての有限部分集合 J と任意の $A_i \in \mathscr{F}_i\,(i \in J)$ に対して

$$\mathbb{P}\,(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}\,(A_i)$$

が成立することである．

$(\Omega, \mathscr{F})$ と $(W, \mathscr{W})$ を可測空間とし，確率変数 $X : (\Omega, \mathscr{F}) \to (W, \mathscr{W})$ に対し，

$$X^{-1}(\mathscr{W}) = \{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \text{ for any } B \in \mathscr{W}\}$$

で定義された集合族は $\mathscr{F}$ の部分 σ–集合族となることがわかる．この部分 σ–集合族を X から生成された σ–集合族という．可測空間 $(W_i, \mathscr{W}_i)\,(i \in I)$ に対し，$X_i : (\Omega, \mathscr{F}) \to (W_i, \mathscr{W}_i)$ を W_i–値の確率変数とする．このとき，$X_i\,(i \in I)$ が独立であるとは，$X_i^{-1}(\mathscr{W}_i)$ が独立であることをいう．

$\mathscr{Y}$ と $\mathscr{Z}$ をそれぞれ空間 Z と W の σ–加法族とする．Y と Z の直積集合

$$\mathscr{Y} \times \mathscr{Z} = \{A \times B : A \in \mathscr{Y},\, B \in \mathscr{Z}\}$$

を含む $Y \times Z$ 上の σ–加法族の中で最小のものを $\sigma(\mathscr{Y} \times \mathscr{Z})$ を $\mathscr{Y} \times \mathscr{Z}$ の直積 σ–加法族といい，これを

$$\mathscr{Y} \otimes \mathscr{Z} = \sigma(\mathscr{Y} \times \mathscr{Z})$$

と記すことにする．

$(Y, \mathscr{Y}, \mu)$ と $(Z, \mathscr{Z}, \nu)$ をふたつの σ–有限測度空間とする．可測空間 $(Y \times Z, \mathscr{Y} \otimes \mathscr{Z})$ 上の測度 π を

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \qquad A \in \mathscr{Y},\, B \in \mathscr{Z} \tag{1.3}$$

で定義する．これを直積測度という．

定理 1.9 可測関数 $f : (Y \times Z, \mathscr{Y} \otimes \mathscr{Z}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ に対して，$y \in Y$ の切り口 $z \to f(y, z)$ は $\mathscr{Z}$–可測となる．

証明 <u>第一段階</u> $C \in \mathscr{Y} \otimes \mathscr{Z}$ に対し，$f^y(z) = \mathbb{I}_C(y, z)$ と書けると仮定する．さらに，固定した $y \in Y$ に対し，

$$\mathscr{H} = \{C \in \mathscr{Y} \otimes \mathscr{Z} : z \to \mathbb{I}_C(y, z) \text{ は } \mathscr{F}\text{–可測} \}$$

を定義する．すると，$\mathscr{H}$ は σ–加法族になること[(1-18)]がわかる．また，$\mathscr{H}$ は $\mathscr{Y} \times \mathscr{Z}$ を含んでいる．よって，$\mathscr{Y} \otimes \mathscr{Z} \subset \mathscr{H}$ となる．しかし，作り形から $\mathscr{H} \subset \mathscr{Y} \otimes \mathscr{Z}$ となるので，$\mathscr{H} = \mathscr{Y} \otimes \mathscr{Z}$ となり，$f^y(z) = \mathbb{I}_C(y, z)\,(C \in \mathscr{H} \subset \mathscr{Y} \otimes \mathscr{Z})$ は $\mathscr{Z}$–可測．

<u>第二段階</u> $f^y(z) = \sum_{i=1}^n a_i\, \mathbb{I}_{C_i}(y, z)$ と仮定する．第一段階から $f^y(z)$ は $\mathscr{Z}$–可測．

<u>第三段階</u> 非負関数 $f(y, z)$ に対し，$\{f_n(y, z)\}_{n=1}^\infty$ は単関数列とし，$f_n(y, z) \nearrow f(y, z)$ を満足するものとする．このとき，$f_n^y(z)$ は $\mathscr{Z}$–可測となり，

$$f^y(z) = \lim_{n \to \infty} f_n^y(z) = f(y, z)$$

も $\mathscr{F}$–可測．

<u>第四段階</u> $f(y, z)$ を任意の可測関数とする．$f^y(z) = (f^+)^y(z) - (f^-)^y(z)$ とすれば，切り口 $g(z) = f(y, z)$ も $\mathscr{Z}$ - 可測となることがわかる． □

定理 1.10 （Tonelli-Fubini の定理）$(Y, \mathscr{Y}, \mu)$ と $(Z, \mathscr{Z}, \nu)$ を σ–有限測度空間とする．

(i) $C \in \mathscr{Y} \otimes \mathscr{Z}$ に対し，

$$\pi(C) = \int_A \nu(C^y)\, d\mu = \int B\mu(C^y)\, d\nu \tag{1.4}$$

とおくと π は $(Y \times Z, \mathscr{Y} \otimes \mathscr{Z})$ 上の σ–有限測度で (1.3) を満たす．さらに，(1.4) を満たす $(Y \times Z, \mathscr{Y} \otimes \mathscr{Z})$ 上の測度は一意的である．これを $\mu \otimes \nu$ と書くことにする．

(ii) $f(y, z)$ を $\mathscr{Y} \otimes \mathscr{Z}$–可測関数とする．$f$ が非負または $\mu \otimes \nu$ に関して可積分であるならば，$y \to \int f(y, z)\, d\nu(y)$ は $\mathscr{Y}$–可測である．そして，

$$\int f(y, z)\, d(\mu \otimes \nu) = \int \int \{f(y, z)\, d\nu(z)\}\, d\mu(y) = \int \int \{f(y, z)\, d\mu(y)\}\, d\nu(z)$$

が成立する．

証明 (i) まず，π の σ–加法性を示す．そのために，$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ を排反な $\mathscr{Y}\otimes\mathscr{Z}$–可測集合の列を取る．このとき，$\{(C_n)^y\}$ も互いに排反な $\mathscr{Z}$–可測集合の列となるので，

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(C_n)^y)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu\{(C_n)^y\}$$

となる．さらに，$\nu\{(C_n)^y\}$ は非負であるので，(1.3) と単調収束定理から

$$\begin{aligned}\pi(\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n) &= \int_Y \nu\{\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n\}\,d\mu(y)\\ &= \int_Y\sum_{n=1}^{\infty}\nu\{(C_n)^y\}\,d\mu(y)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_Y \nu\{(C_n)^y\}\,d\mu(y)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\pi(C_n)\end{aligned}$$

より示せた．つぎに，π の一意性を示す．

(ii) 第一段階　(i) において $f(y,\,z)=\mathbb{I}_C(y,\,z)\,(C\in\mathscr{Y}\otimes\mathscr{Z})$ の場合についてはすでに示した．

第二段階　f を単関数とする．積分の線形性より結果は成立する．

第三段階　f は非負の $\mathscr{Y}\otimes\mathscr{Z}$–可測関数とする．$f_n$ を単関数とし，$f_n\nearrow f$ とする．このとき，

$$\inf f(y,\,z)\,d(\mu\otimes\nu)(y,\,z)=\lim_{n\to\infty}\int f_n(y,\,z)\,d(\mu\otimes\nu)(y,\,z)=\lim_{n\to\infty}\int\{\int f_n(y,z)\,d\nu(z)\}\,d\mu(y)$$

となる．さらに，$y\to\int f_n(y,\,z)\,d\nu(z)$ は単調増加（n に関して）なので，$y\to\int f(y,\,z)\,d\nu(z)$ に収束する(1-19)ので，再度単調収束定理を用いれば，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int\{\int f_n(y,\,z)\,d\nu(z)\}\,d\mu(y) &= \int\{\lim_{n\to\infty}\int f_n(y,\,z)\,d\nu(z)\}\,d\mu(y)\\ &= \int\{\int\lim_{n\to\infty}f_n(y,\,z)\,d\nu(z)\}\,d\mu(y)\\ &= \int\{\int f(y,\,z)\,d\nu(z)\}\,d\mu(y)\end{aligned}$$

となる．残りの部分は同様に示せる．

第四段階　一般の f に対しては，$f^+=\max(f,\,0),\ f^-=\max(-f,\,0)$ とすればよい．□

例 1.3 Fubini の定理を用いて

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^N\frac{\sin x}{x}\,dx$$

を示そう．

任意の正の正数 n に対して

$$I_n\equiv\int_0^n\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^n\frac{\sin x}{x}\,dx\int_0^\infty e^{-ux}\,du$$

であることに注意する．μ を Lebeague 測度とし，直積測度空間

$$((0,\,n]\times(0,\,\infty),\mathcal{B}((0,\,n])\times\mathcal{B}((0,\,\infty)),\mu\times\mu)$$

を考える．このとき，$f(x, u) = e^{-ux}\sin x$ は $(0, n] \times (0, \infty)$ 上の連続関数なので，２次元 Borel 可測関数である．また，$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\sin x/x| \le 1$ から

$$\int_0^n dx \int_0^\infty \left| e^{-ux}\frac{\sin x}{x} \right| du \le= \int_0^n \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \le n < \infty$$

から $f(x, u)$ は可積分であることがわかる．したがって，Fubini の定理から

$$I_n = \int_0^\infty du \int_0^n e^{-ux}\frac{\sin x}{x}\, dx$$

が得られる．簡単な部分積分の計算から

$$\int_0^n e^{-ux}\frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{1+u^2}\{1 - e^{-un}(u\sin x + \cos n)\}$$

が得られる．これから

$$I_n = \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\, du - \int_0^\infty e^{-un}\frac{u\sin x + \cos n}{1+u^2}\, du$$

となる．しかし，

$$\int_0^\infty \left| e^{-un}\frac{u\sin x + \cos n}{1+u^2} \right| du \le 2\int_0^\infty e^{-un}\, du = \frac{2}{n}$$

となり，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-un}\frac{u\sin x + \cos n}{1+u^2}\, du = 0$$

となる．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\, du = \frac{\pi}{2}$$

がわかる．

1.7 基本的な確率不等式

命題 1.9 非負確率変数 $X \ge 0,\ a.s.$ と正数 $p > 0$ に対して，

$$\mathbb{E}\, X^p = \int_0^\infty p t^{p-1} \mathbb{P}(X > t)\, dt$$

が成立する．

証明 Fubini の定理を用いて変形すれば，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p t^{p-1} \mathbb{P}\,(X > t)\, dt &= \int_0^\infty p t^{p-1} \mathbb{E}\, \mathbb{I}_{(t,\,\infty)}(X)\, dt = \mathbb{E} \int_0^\infty p t^{p-1}\, \mathbb{I}_{(t,\,\infty)}(x)\, dt \\ &= \mathbb{E} \int_0^X p t^{p-1}\, dt = \mathbb{E}\, X^p\end{aligned}$$

から命題は証明される． □

命題 1.10 （Markov の不等式） $X \ge 0,\ a.s.$ とする．任意の $a > 0$ に対して，

$$\mathbb{P}\,(X \ge a) = \frac{\mathbb{E}\, X}{a}$$

が成立する．

証明　$X \in [a, \infty)$ のとき，$X/a \geq 1$ に注意する：

$$\mathbb{P}\{X \geq a\} = \mathbb{E}\,[\,\mathbb{I}_{[a,\,\infty)}(X)] \leq \mathbb{E}\,[\frac{X}{a}\,\mathbb{I}_{[a,\,\infty)}(X)] \leq \frac{\mathbb{E}\,X}{a}.$$

□

注意 1.3　Y を確率変数とする．$X = (Y - \mathbb{E}\,Y)^2$ とおけば，Chebyshev の不等式

$$\mathbb{P}\{|Y - \mathbb{E}\,Y| \geq a\} = \mathbb{P}\{(Y - \mathbb{E}\,Y)^2 \geq a^2\} \leq \frac{\mathbb{VAR}(Y)}{a^2}$$

を得る．

命題 1.11（Jensen の不等式）　g は上に凸とし，X と $g(X)$ は可積分とする．このとき，

$$g(\mathbb{E}\,X) \leq \mathbb{E}\,g(X)$$

が成立する．

証明　任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ とある定数 c に対し，$g(x) \geq g(x_0) + c(x - x_0)$ が成立する．$x = X(\omega)$ として，期待値をとれば，$\mathbb{E}\,g(x) \geq g(x_0) + c(\mathbb{E}\,X - x_0)$ を得る．さらに，$x_0 = \mathbb{E}\,X$ とすれば，命題は証明される．□

定理 1.11（ヘルダーの不等式）　正数 p, q は $1/p + 1/q = 1$ をみたすとする．$\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$, $\mathbb{E}[|Y|^q] < \infty$ なる確率変数 X, Y を確率変数に対して，

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \{\mathbb{E}[|X|^p\}^{1/p}\{\mathbb{E}[|Y|^q\}^{1/q}$$

が成立する．ときに，$p = 2,\, q = 2$ のときの不等式

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[|X|^2]}\sqrt{\mathbb{E}[|Y|^2]}$$

をシュバルツの不等式という．

証明　まず，任意の正の数 a, b に対して，

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{b}b^q \geq ab \tag{1.5}$$

が成立することを示す．ただし，等号成立は $a^p = b^q$ の時に限る．b を固定して，

$$g(a) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$$

とおき，$g(a)$ を a に関して最小化する：

$$\frac{d}{da}g(a) = a^{p-1} - b = 0 \Longleftrightarrow b = a^{p-1}$$

となり，2 次の導関数を確認すれば，$a = b^{1/(p-1)}$ のとき，最小となる．したがって，

$$g(a) \geq g(b^{1/(p-1)}) = \frac{1}{p}b^{p/(p-1)} + \frac{1}{q}b^q - b^{1/(p-1)}b = \frac{1}{p}b^q + \frac{1}{q}b^q - b^q = 0$$

となる．最後から 2 番目の等号は $p/(p-1) = q$ よりわかる．

次に，

$$a = \frac{|X|}{(\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}}, \qquad b = \frac{|Y|}{(\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q}},$$

として，(1.5) を用いてば，

$$\frac{1}{p}\frac{|X|^p}{\mathbb{E}[|X|^p]} + \frac{1}{q}\frac{|Y|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]} \geq \frac{|XY|}{(\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}(\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q}}$$

を得る．この両辺の期待値を取れば，定理は証明された．□

1.8 条件付期待値

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし，X を Ω 上の可積分な確率変数とする．すなわち，$X : \Omega \to \mathbb{R}$ は可側で $\mathbb{E}\,|X| < \infty$ である．

定義 1.15 $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ を部分 σ–集合体とする．$\mathscr{F}_0$ に関する X の条件付期待値とは，$\mathscr{F}_0$–可側写像 $X' : \Omega \to \mathbb{R}$ ですべての $F \in \mathscr{F}_0$ に対して

$$\mathbb{E}\,[X\,\mathbb{I}_F] = \mathbb{E}\,[X'\,\mathbb{I}_F] \tag{1.6}$$

をみたすものである．確率変数 X' を $\mathbb{E}\,(X|\,\mathscr{F}_0)$ と書き表す.

定理 1.12 X を $\mathbb{E}\,|X| < \infty$ なる確率変数とし，$\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ を部分 σ–加法族とする．このとき，(1.6) をみたす $\mathscr{F}_0$–可測写像 $X' : \Omega \to \mathbb{R}$ は一意的に存在する．

証明 $X \geq 0$ のとき，σ–加法族 $\mathscr{F}_0$ 上の測度を

$$\mu(F) = \mathbb{E}\,[X\,\mathbb{I}_F] \qquad \forall F \in \mathscr{F}_0$$

と定義する．明らかに測度の公理をみたし，有限であり，$\mathscr{F}_0$ に制限した測度 $\mathbb{P}$ に関して絶対連続(1-20)となる．Radon–Nikodym の定理から $\mathscr{F}_0$–可測写像 X' が一意的 (零集合を除いて) に存在して，

$$\mu(F) = \mathbb{E}\,[X'\,\mathbb{I}_F] \qquad \forall F \in \mathscr{F}_0$$

となる．X' が求める写像である．一般の X に対しては X^+ と X^- にわけて(1-21)考えればよい.

つぎに，一意性を示す．X' と X'' を $\mathscr{F}_0$–可測確率変数とし，ともに (1.6) をみたすとする．すると，すべての $F \in \mathscr{F}_0$ に対して，$\mathbb{E}\,[(X' - X'')\,\mathbb{I}_F] = 0$ となる．ここで，$X' - X''$ は $\mathscr{F}_0$–可測であることに注意する．このとき，$F = \{X' > X''\}$ に対して，$\mathbb{E}\,[(X' - X'')\,\mathbb{I}_F] = 0$ となるので，$\mathbb{P}\,(X' \leq X'') = 1$ がわかる(1-22)．さらに，$F = \{X' < X''\}$ とおけば，同様な議論から $\mathbb{P}\,(X' \geq X'') = 1$ がわかる．したがって，$\mathbb{P}\,(X' = X'') = 1$ となる(1-23). □

$(\mathbb{D}, \mathscr{D})$ を測度空間とし，$Y : \Omega \to \mathbb{D}$ を可測写像とすれば，Y は Ω の σ–加法族 $\sigma(Y)$ を生成する．$\mathbb{E}\,[X|\,\sigma(Y)]$ を簡単に $\mathbb{E}\,(X|\,Y)$ と記すことにする．

注意 1.4 (1) X 自身が $\mathscr{F}_0$–可測ならば，$\mathbb{E}\,[X|\,\mathscr{F}_0] = X$ である(1-24)．
(2) $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ の場合，$\mathscr{F}_0$–可測な確率変数は定数以外にないので，$\mathbb{E}\,[X|\,\{\emptyset, \Omega\}] = \mathbb{E}\,[X]$ となる．
(3) 一般に，X と $\mathscr{F}_0$ が独立ならば，$\mathbb{E}\,[X|\,\mathscr{F}_0] = \mathbb{E}\,[X]$ となる(1-25)．

例 1.4 $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は可測写像で確率密度関数 $f_{X,Y}(x, y)$ を持つ(1-26)と仮定する．このとき，

$$\mathbb{E}\,[X|\,Y] = \frac{\int x f_{X,Y}(x, y)\,dx}{\int f_{X,Y}(x, y)\,dx}$$

となることを示す．そのために，任意のボレル可測集合 $B \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\mathbb{E}\,[X\,\mathbb{I}_{\{Y \in B\}}] = \mathbb{E}\,[g(Y)\,\mathbb{I}_{\{Y \in B\}}]$$

となるボレル可測関数 $g(y)$ を求めればよい．Fubini の定理を用いれば，

$$\mathbb{E}\,[X\,\mathbb{I}_{\{Y \in B\}}] = \int_B \int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, y)\,dx\,dy = \int_B \left(\int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, y)\,dx \right) dy$$

と

$$\mathbb{E}\left[g(Y)\,\mathbb{I}_{\{Y\in B\}}\right] = \int_B \int_{\mathbb{R}} g(y) f_{X,\,Y}(x,\,y)\,dx\,dy = \int_B g(y)\left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,\,Y}(x,\,y)\,dx\right) dy$$

となり，任意のボレル可測集合 B 上で上のふたつの積分は一致するので，

$$g(y)\int_{\mathbb{R}} f_{X,\,Y}(x,\,y)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x f_{X,\,Y}(x,\,y)\,dx$$

となることよりわかる． □

例 1.5 Ω の分割を考える．$\Omega = \cup_{i=1}^{k} F_i$ かつ $F_i \cap F_j\,(i \neq j)$ である．さらに，$\mathbb{P}(F_i) > 0\,(i = 1,\,2,\,\ldots,\,k)$ とし，$\mathscr{F}_0 = \sigma(F_1,\,F_2,\,\ldots,\,F_k)$ とおく．このとき，

$$\mathbb{E}\left[X|\,\mathscr{F}_0\right] = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{E}\left[X|\,F_i\right]\mathbb{I}_{F_i}$$

となる(1-27)．ただし，

$$\mathbb{E}\left[X|\,F_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[X\,\mathbb{I}_{F_i}\right]}{\mathbb{P}\left(F_i\right)}$$

である． □

命題 1.12 $\mathscr{F}_0$ を部分 σ–加法族とする．
(1) $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(X|\,\mathscr{F}_0\right)\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$.
(2) Z が $\mathscr{F}_0$–可測ならば，$\mathbb{E}\left[ZX|\,\mathscr{F}_0\right] = Z\mathbb{E}\left[X|\,\mathscr{F}_0\right](a.s.)$ ただし，$X \in L_p(\Omega,\,\mathscr{F},\,\mathbb{P})$ と $Z \in L_q(\Omega,\,\mathscr{F},\,\mathbb{P})$ で $1 \leq q \leq \infty$ かつ $p^{-1} + q^{-1} = 1$ を仮定する．
(3) $\mathbb{E}\left[aX + bY|\,\mathscr{F}_0\right] = a\mathbb{E}\left[X|\,\mathscr{F}_0\right] + b\mathbb{E}\left[Y|\,\mathscr{F}_0\right]$. ただし，$a,\,b$ は定数である．
(4) $X \geq 0\,(a.s.)$ のとき，$\mathbb{E}\left[X|\,\mathscr{F}_0\right] \geq 0\,(a.s.)$
(5) $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}$ なる部分 σ–加法族としたとき，$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(X|\,\mathscr{F}_1\right)|\,\mathscr{F}_0\right] = \mathbb{E}\left[X|\,\mathscr{F}_0\right](a.s.)$
(6) $\phi:\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸関数のとき，$\mathbb{E}\left[\phi(X)|\,\mathscr{F}_0\right] \geq \phi(\mathbb{E}\left[X|\,\mathscr{F}_0\right])\,(a.s.)$
(7) $p \geq 1$ のとき，$\{\mathbb{E}\left[|\mathbb{E}\left(X|\,\mathscr{F}_0\right)|^p\right]\}^{1/p} \leq \{\mathbb{E}\,|X|^p\}^{1/p}$.

証明 □

命題 1.13 $\{X_n\},\,X$ を確率変数とする．
(1) $0 \leq X_n \uparrow X\,(a.s.)$ のとき，$0 \leq \mathbb{E}\left[X_n|\,\mathscr{F}_0\right] \uparrow \mathbb{E}\left[X|\,\mathscr{F}_0\right](a.s.)$
(2) すべての n に対して，$X_n \geq 0\,(a.s.)$ のとき，$\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n|\,\mathscr{F}_0\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n|\,\mathscr{F}_0\right](a.s.)$
(3) すべての n に対して，$|X_n| \leq Y$ で Y は可積分な確率変数とし，$X_n \xrightarrow{as} X$ のとき，$\mathbb{E}\left(X_n|\,\mathscr{F}_0\right) \xrightarrow{as} \mathbb{E}\left(X|\,\mathscr{F}_0\right)$ となる．

証明 □

定理 1.13 $\mathbb{E}\left(X^2\right) < \infty$ のとき，$\mathbb{E}\left(X|\,\mathscr{F}_0\right)$ は 2 乗可積分な $\mathscr{F}_0$–可測確率変数で 2 乗平均の意味で X にもっとも近い．すなわち，任意の 2 乗可積分な $\mathscr{F}_0$–可測確率変数 Y に対して

$$\mathbb{E}\left[\{X - \mathbb{E}\left(X|\,\mathscr{F}_0\right)\}^2\right] \leq \mathbb{E}\left[(X - Y)^2\right]$$

となる．

証明　まず，$\mathbb{E}Y^2 < \infty$ なる任意の $\mathscr{F}_0$–可測確率変数 Y に対して

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(X|\,\mathscr{F}_0\right)Y\right] = \mathbb{E}\left[XY\right] \tag{1.7}$$

が成り立つことを示す．Y が単関数[(1-28)]ならば，期待値の線形性と条件付期待値の性質より (1.7) は明らか[(1-29)]．Y が 2 乗可積分なので，単関数の列 $\{Y_n\}$ が存在して，

$$\mathbb{E}\left(Y_n - Y\right)^2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

とできる．これより

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(X|\,\mathscr{F}_0\right)Y_n\right] \to \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(X|\,\mathscr{F}_0\right)Y\right]$$

と

$$\mathbb{E}\left[XY_n\right] \to \mathbb{E}\left[XY\right]$$

がわかる[(1-30)]．よって，(1.7) が示せた[(1-31)]．

いま，$X' = \mathbb{E}\left(X|\,\mathscr{F}_0\right)$ とおく．

$$\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = \mathbb{E}\left[(X-X')^2\right] + 2\mathbb{E}\left[(X-X')(X'-Y)\right] + \mathbb{E}\left[(X'-Y)^2\right]$$

となる．しかし，$X' - Y$ は $\mathscr{F}_0$–可測なので，

$$\mathbb{E}\left[(X-X')(X'-Y)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(X-X')(X'-Y)|\,\mathscr{F}_0\right]\right] = \mathbb{E}\left[(X'-Y)\mathbb{E}\left[X-X'|\,\mathscr{F}_0\right]\right] = 0$$

となる．よって，

$$\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = \mathbb{E}\left[(X-X')^2\right] + \mathbb{E}\left[(X'-Y)^2\right]$$

を得る．右辺は $Y = X'\,(a.s.)$ のときに最小[(1-32)]となる．　□

1.9　一様可積分性

補題 1.3 確率変数 X が可積分であるために必要十分条件はすべての $\epsilon > 0$ に対して，ある数 $M > 0$ が存在して

$$\mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_{\{|X|>M\}}\right] < \epsilon$$

となることである．

証明　（必要性）: X は可積分ならば，$\mathbb{P}\left(|X| < \infty\right) = 1$ となる．確率変数の列 $\{|X|\,\mathbb{I}_{\{|X|>M\}}\}_{M=1}^{\infty}$ を考える．すると $M \to \infty$ のとき，$\{|X| < \infty\}$ 上で $\{|X|\,\mathbb{I}_{\{|X|>M\}}\}_{M=1}^{\infty} \downarrow 0$ となる．単調収束定理から

$$\lim_{M\to\infty} \mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_{\{|X|>M\}}\right] = 0$$

となる．よって，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $M > 0$ が存在して $\mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_{\{|X|>M\}}\right] < \epsilon$ となる．
（十分性）: $\epsilon = 1$ とする．ある $M > 0$ が存在して，$\mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_{\{|X|>M\}}\right] < 1$ となる．このとき，

$$\mathbb{E}\left[|X|\right] = \mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_{\{|X|>M\}}\right] + \mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_{\{|X|\le M\}}\right] < 1 + M\mathbb{P}\left(|X| \le M\right) \le 1 + M < \infty$$

からわかる．　□

補題 1.4 確率変数 X が可積分ならば，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある数 $\delta > 0$ が存在して

$$\mathbb{P}\left(A\right) < \delta \Longrightarrow \mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_A\right] < \epsilon$$

となる．

証明 $\epsilon > 0$ とする．X が可積分ならば，補題 1.3 から，ある $M > 0$ が存在して，

$$\mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_{\{|X|>M\}}\right] < \frac{\epsilon}{2}$$

となる．これに注意すれば，

$$\mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_A\right] = \mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_{A\cap\{|X|>M\}}\right] + \mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_{A\cap\{|X|\le M\}}\right] \le M\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_{\{|X|\le M\}}\right] < M\mathbb{P}(A) + \frac{\epsilon}{2}$$

となるので，$\delta = \epsilon/(2M)$ ととれば，

$$\mathbb{P}(A) < \delta \Longrightarrow \mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_A\right] < \epsilon$$

となる． □

定義 1.16 確率変数の族 $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ が一様可積分であるとは，

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[|X_\alpha|\,\mathbb{I}_{\{|X_\alpha|>M\}}\right] = 0 \tag{1.8}$$

をみたすときをいう．

例 1.6 可積分な確率変数の有限個の族は一様可積分である．なぜならば，確率変数 X の可積分性から

$$\mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_{\{|X|>M\}}\right] \to 0 \qquad (M \to \infty)$$

が成立するからである．

例 1.7 確率変数の族 $\{X_\alpha :\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ が $\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\,|X_\alpha|^2 < \infty$ (1-33)ならば，

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[|X_\alpha|\,\mathbb{I}_{\{|X_\alpha|>M\}}\right] \le \frac{1}{M} \lim_{M\to\infty} \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[|X_\alpha|^2\right] = 0$$

より，一様可積分であることがわかる．

例 1.8 確率変数の族 $\{X_\alpha :\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ が 一様可積分ならば，$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[|X_\alpha|\right] < \infty$ (1-34)である．なぜならば，一様可積分性より M_0 をうまくとれば，

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[|X_\alpha|\,\mathbb{I}_{\{|X_\alpha|>M_0\}}\right] < 1$$

とできる．これより，任意の $\alpha \in \mathcal{A}$ に対して

$$\mathbb{E}\left[|X_\alpha|\right] = \mathbb{E}\left[|X_\alpha|\,\mathbb{I}_{\{|X_\alpha|\le M_0\}}\right] + \mathbb{E}\left[|X_\alpha|\,\mathbb{I}_{\{|X_\alpha|>M_0\}}\right] < M_0 + 1$$

より，$\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ は L_1–有界がわかる．

例 1.9 確率変数の族 $\{X_\alpha :\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ が，ある $\infty > p > 1$ に対して，

$$C_p := \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[|X_\alpha|^p\right] < \infty$$

のとき，一様可積分である．なぜならば，Hölder の不等式と Markov の不等式から

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X_\alpha|\,\mathbb{I}_{\{|X_\alpha|>M\}}\right] &\le \{\mathbb{E}\left[|X_\alpha|^p\right]\}^{1/p}\{\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{|X_\alpha|>M\}}\right]\}^{1/q} \le C_p^{1/p}\{\mathbb{P}(|X_\alpha| > M)\}^{1/q} \\
&= C_p^{1/p}\{\mathbb{P}(|X_\alpha|^p > M^p)\}^{1/q} \le C_p^{1/p}\left\{\mathbb{E}\left(\frac{|X_\alpha|^p}{M^p}\right)\right\}^{1/q} = \frac{C_p}{M^{p/q}} \to 0 \qquad (M\to\infty)
\end{aligned}$$

がわかる(1-35)．ただし，$p^{-1} + q^{-1} = 1$ である．

定理 1.14 任意の確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\{X_n\}$ が一様可積分であるために必要十分条件はつぎのふたつの条件が成立することである．

(1) $\sup_n \mathbb{E}\left[|X_n|\right] < \infty$.

(2) $\{X_n\}$ は一様絶対連続(1-36)．

証明 （必要性）: 一様可積分の定義よりある正の数 M_1 が存在し $\sup_n \mathbb{E}\left[|X_n| \mathbb{I}_{\{|X_n|>M_1\}}\right] \le 1$ とできる．このとき，任意の $k \ge 1$ に対して $\mathbb{E}\left[|X_k|\right] \le 1 + M_1$ と(1-37)なり，(1) が成立することがわかる．

同様に，任意の $\epsilon > 0$ が与えられたとき，正の数 M_2 をうまく定めると

$$\sup_n \mathbb{E}\left[|X_n| \mathbb{I}_{\{|X_n|>M_2\}}\right] < \frac{\epsilon}{2}$$

が成立するようにできる．そこで $\delta = \epsilon/(2M_1)$ とおき，$\mathbb{P}(B_k) < \delta$ を仮定すれば，すべての k に対して，$\mathbb{E}\left[|X_k| \mathbb{I}_{B_k}\right] < \epsilon$ となること(1-38)がわかる．よって，(2) が示せた．

（十分性）: つぎに十分性を示す．すべての n に対して $\mathbb{E}\left[|X_n|\right] = 0$ のときは自明なので，$\sup_n \mathbb{E}\left[|X_n|\right] > 0$ と仮定する．まず，(2) より，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$\mathbb{P}(A_n) < \delta \Longrightarrow \mathbb{E}\left[|X_n| \mathbb{I}_{A_n}\right] < \epsilon \tag{1.9}$$

が成立する．そこで $\beta = \delta^{-1} \sup_n \mathbb{E}\left[|X_n|\right]$ おくと (1) より $0 < \beta < \infty$ となる．さらに，各 $k \ge 1$ に対し $A_k = \{|X_k| > \beta\}$ とおく．すると $\mathbb{P}(A_k) < \delta$ となること(1-39)から 1.9) を適用すれば，

$$\mathbb{E}\left[|X_k| \mathbb{I}_{|X_k|>\beta}\right] < \epsilon$$

となり，$\{X_n\}$ の一様可積分性が示された． □

□

定理 1.15 X を確率変数とし，確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は L_1–有界(1-40)とし，$X_n \xrightarrow{P} X$ とする．このとき，つぎは同値である．

(1) 確率変数 X は $\mathbb{E}\left[|X|\right] < \infty$ で

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X|\right] \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

(2) $\{X_n\}$ は一様可積分.

証明 □

例 1.10 可積分な確率変数 X に対して，確率変数の族 $\{\mathbb{E}\left[X|\mathscr{F}_0\right] : \mathscr{F}_0$は部分 σ–加法族$\}$ は一様可積分である．

証明 $\mathbb{E}\left[|X|\right] < \infty$ から $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ は事象列で $\mathbb{P}(A_n) \to 0\,(n \to \infty)$ とする．すると $|X|\,\mathbb{I}_{A_n} \xrightarrow{P} 0$ となること(1-41)がわかる．優収束定理(1-42)から $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_{A_n}\right] = 0$ となる．したがって，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，

$$P(A_n) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\left[|X|\,\mathbb{I}_{A_n}\right] < \epsilon \tag{1.10}$$

とできる．

いま，M を十分大きくとれば，

$$\frac{1}{M}\mathbb{E}\left[|X|\right] < \delta$$

とできる．Jensen の不等式より

$$\mathbb{I}_{|\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_0)|>M} \leq \mathbb{I}_{\mathbb{E}[|X||\mathscr{F}_0]>M} \tag{1.11}$$

となること[1-43]と $\{\mathbb{E}(|X||\mathscr{F}_0) > M\} \in \mathscr{F}_0$ となることに注意して，条件付期待値の定義を用いると

$$\mathbb{E}[|\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_0)|\,\mathbb{I}_{\{|\mathbb{E}(X||\mathscr{F}_0)|>M\}}] \leq \mathbb{E}[|X|\,\mathbb{I}_{\{\mathbb{E}[|X||\mathscr{F}_0]>M\}}] \tag{1.12}$$

となる[1-44]ことがわかる．さらに，(1.11) と Markov の不等式から

$$\mathbb{P}\{|\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_0)| > M\} \leq \mathbb{P}\{\mathbb{E}(|X||\mathscr{F}_0) > M\} \leq \frac{1}{M}\mathbb{E}(X) < \delta$$

となること[1-45]から (1.10) において $A_n = \{\mathbb{E}(|X||\mathscr{F}_0) > M\}$ とおけば，$\mathbb{E}[|X|\,\mathbb{I}_{\{\mathbb{E}[|X||\mathscr{F}_0]>M\}}] \leq \epsilon$ となることと (1.12) から $\mathbb{E}[|\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_0)|\,\mathbb{I}_{\{|\mathbb{E}[X||\mathscr{F}_0]|>M\}}] \leq \epsilon$ を得る．ϵ は任意なので，$M \to \infty$ のとき，

$$\mathbb{E}[|\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_0)|\,\mathbb{I}_{\{|\mathbb{E}[X||\mathscr{F}_0]|>M\}}] \to 0$$

を得る．よって，$\{|\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_0)|\}$ の一様可積分性は示せた． □

第2章　離散時間マルチンゲール

2.1　マルチンゲールについて

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $\bar{\mathbb{Z}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とする．確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上のフィルトレーション $\{\mathscr{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ とは増大する部分 σ–加法族の列である：すなわち

$$\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{F}$$

である．また，$\mathscr{F}_\infty = \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n)$ とする．$(\Omega, \mathscr{F}, \{F_n\}, \mathbb{P})$ をフィルター付き確率空間という．すべての $n \geq 0$ に対して，X_n は $\mathscr{F}_n$–可測確率変数のとき，$X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ のことを確率過程とよぶ．

定義 2.1 すべての $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して，X_n が $\mathscr{F}_n$– 可測であるとき，X は $\{\mathscr{F}\}$ に適合しているという．

例 2.1 $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ とすれば，$X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\{\mathscr{F}_n\}$–適合確率過程となる．

定義 2.2 フィルター付確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}, \mathbb{P})$ 上で定義される適合確率過程 $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ がすべての $n \in \mathbb{Z}_+$ について $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ であるとする．このとき，
(1) すべての $m \leq n$ に対して，$\mathbb{E}(X_n | \mathscr{F}_m) = X_m$ のとき，X は $\{\mathscr{F}_n\}$–マルチンゲールという．
(2) すべての $m \leq n$ に対して，$\mathbb{E}(X_n | \mathscr{F}_m) \geq X_m$ のとき，X は $\{\mathscr{F}_n\}$–劣マルチンゲールという．
(3) すべての $m \leq n$ に対して，$\mathbb{E}(X_n | \mathscr{F}_m) \leq X_m$ のとき，X は $\{\mathscr{F}_n\}$–優マルチンゲールという．

注意 2.1 すべての $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathscr{F}_n) = X_n$ ならば，X は $\{\mathscr{F}_n\}$–マルチンゲールとなる．なぜならば，$k \geq 2$ に対して，$\mathscr{F}_{n+k-1} \supset \mathscr{F}_n$ より

$$\mathbb{E}[X_{n+k} | \mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{n+k} | \mathscr{F}_{n+k-1}) | \mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+k-1} | \mathscr{F}_n]$$

からわかる．

例 2.2 $Y_1, Y_2, \ldots$ は独立な確率変数列ですべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{E}[Y_n] = 0$ とする．このとき，$X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ と $X_0 = 0$ とし，$\mathscr{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ と $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ とする．このとき，X は $\{F_n\}$–マルチンゲールである．なぜならば，X_{n+1} は $\mathscr{F}_n$ と独立で Y_n は $\mathscr{F}_n$– 可測であることに注意すれば，

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} + Y_n | \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathscr{F}_n) + \mathbb{E}(Y_n | \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}) + Y_n$$

となることがわかる．

定理 2.1 確率過程 $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\{\mathscr{F}_n\}$–マルチンゲールとし，φ は凸関数とし，すべての $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して $\mathbb{E}[|\varphi(X_n)|] < \infty$ とする．このとき，$\{\varphi(X_n)\}_{n=0}^{\infty}$ は $\{\mathscr{F}_n\}$– 劣マルチンゲールである．
証明　Jensen の不等式と X のマルチンゲール性から

$$\mathbb{E}(\varphi(X_n) | \mathscr{F}_n) \geq \varphi(\mathbb{E}(X_n | \mathscr{F}_n)) = \varphi(\mathbb{E}(X_n))$$

からわかる． □

2.2 停止マルチンゲールについて

定義 2.3 フィルター付確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}, \mathbb{P})$ 上の確率変数 $T : \Omega \to \bar{\mathbb{Z}}_+$ は停止時間であるとは，すべての $n \in \bar{\mathbb{Z}}_+$ に対して，$\{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ のときをいう．

例 2.3 確率変数列 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\sigma(X_1, \dots, X_n) \subset \mathscr{F}_n$ をみたすとし，固定した $a\,(a > 0)$ に対して

$$T = \inf\{n : |X_n| \geq a\}$$

と定義する．ただし，すべての n に対して，$|X_n| < a$ のとき，$T = \infty$ とする．このとき，T は停止時間となる．なぜならば，$\{T > n\} = \cap_{k=1}^{n}\{|X_k| < a\}$ より

$$\{T \leq n\} = \cup_{k=1}^{n}\{|X_k| \geq a\} \in \mathscr{F}_n$$

からわかる．

定理 2.2 T_1 と T_2 が停止時間ならば，$\min(T_1, T_2)$ と $\max(T_1, T_2)$ はいずれも停止時間である．

証明 任意の $n \in \bar{\mathbb{Z}}_+$ に対して，

$$\{\min(T_1, T_2) \leq n\} = \{T_1 \leq n\} \cup \{T_2 \leq n\} \in \mathscr{F}_n$$

と

$$\{\max(T_1, T_2) \leq n\} = \{T_1 \leq n\} \cap \{T_2 \leq n\} \in \mathscr{F}_n$$

からわかる． □

X^T で確率過程 X を T で停止した過程を表すことにする：すなわち

$$(X^T)_n(\omega) = X_{T(\omega)\wedge n}(\omega)$$

である．

定理 2.3 T を停止時間とし，X を劣マルチンゲールとする．このとき，X^T も劣マルチンゲールである．

証明 まず，

$$(X^T)_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{i \leq T\}}(X_i - X_{i-1})$$

に注意する．また，$(X^T)_{n+1} - (X^T)_n = \mathbb{I}_{\{n+1 \leq T\}}(X_{n+1} - X_n)$ であり，$\mathbb{I}_{\{n+1 \leq T\}}$ は $\mathscr{F}_n$–可測[(2-1)]となる．よって，これらのことと X の劣マルチンゲール性を用いれば，

$$\mathbb{E}\,[(X^T)_{n+1} - (X^T)_n |\, \mathscr{F}_n] \geq 0$$

となる[(2-2)]．また，すべての $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$\mathbb{E}\,[|(X^T)_n|] \leq \mathbb{E}\,[\max_{1 \leq i \leq n} |X_n|] < \infty$$

から可積分性もわかる． □

2.3 マルチンゲール変換

定義 2.4 フィルター付確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}, \mathbb{P})$ 上の確率過程 $C = \{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\{\mathscr{F}_n\}$– 可予測（predictable）であるとは，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，C_n が $\mathscr{F}_{n-1}$–可測であることをいう．

$X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $\{\mathscr{F}_n\}$–マルチンゲールとし，$C = \{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\{\mathscr{F}_n\}$–可予測過程としたとき

$$(C \cdot X)_n := \sum_{i=1}^{n} C_i(X_i - X_{i-1}) + Y_0, \qquad Y_0 = 0$$

を X の C によるマルチンゲール変換という．

定理 2.4 すべての $n \in \mathbb{Z}_+$ とある $p^{-1} + q^{-1} = 1$ に対して，$\mathbb{E}\left[|C_n|^p\right] < \infty$ と $\mathbb{E}\left[|X_n|^q\right] < \infty$ とする．
(1) C が可予測とし，X がマルチンゲールならば，$C \cdot X$ もマルチンゲール．
(1) C が可予測で非負とし，X が劣マルチンゲールならば，$C \cdot X$ も劣マルチンゲール．

証明 X が劣マルチンゲールの場合を示す．$(C \cdot X)_{n+1} - (C \cdot X)_n = C_{n+1}(X_{n+1} - X_n)$ と C_{n+1} は $\mathscr{F}_n$–可測であることと X の劣マルチンゲール性から

$$\mathbb{E}\left[(C \cdot X)_{n+1} - (C \cdot X)_n \middle| \mathscr{F}_n\right] = C_{n+1}\mathbb{E}\left[X_{n+1} - X_n \middle| \mathscr{F}_n\right] \geq 0$$

から $\mathbb{E}\left[(C \cdot X)_{n+1} \middle| \mathscr{F}_n\right] \geq (C \cdot X)_n$ がわかる．また，Hölder の不等式からすべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathbb{E}\left[|(C \cdot X)_n|\right] < \infty$ もわかる． □

2.4 Doob の上向き横断数補題

$a < b$ を与えられた数とする．時点 n までの $n \mapsto X_n(\omega)$ によって $[a, b]$ を上向きに横断する数 $U_n[a, b](\omega)$ は，以下で述べる性質をみたす $\mathbb{Z}_+$ における最大の k と定義される．すなわち，

$$0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < s_k < t_k \leq n.$$

ここで

$$X_{s_i}(\omega) < a, \qquad X_{t_i}(\omega) > b, \qquad (1 \leq i \leq k)$$

である．

補題 2.1 X は優マルチンゲールとする．このとき，

$$(b - a)\mathbb{E}\left(U_n[a, b]\right) \leq \mathbb{E}\left[(X_n - a)^-\right]$$

となる．

証明 $C_1 = \mathbb{I}_{\{X_0 < a\}}$ とし，$n \geq 2$ に対して，

$$C_n := \mathbb{I}_{\{C_{n-1}=1\}}\mathbb{I}_{\{X_{n-1} \leq b\}} + \mathbb{I}_{\{C_{n-1}=0\}}\mathbb{I}_{\{X_{n-1} \leq a\}}$$

とおけば，

$$(C \cdot Y)_n(\omega) + (X_n - a)^-(\omega) \geq (b - a)U_n[a, b](\omega) \tag{2.1}$$

となる．定義より C は可予測過程でなの非負なので $C \cdot Y$ は優マルチンゲールとなる．したがって，$\mathbb{E}\left[(C \cdot Y)_n | \mathscr{F}_0\right] \leq (C \cdot Y)_0 = 0$ より

$$\mathbb{E}\left[(C \cdot Y)_n\right] = \mathbb{E}\left[\left[(C \cdot Y)_n \middle| \mathscr{F}_0\right]\right] \leq \mathbb{E}\left(X_0\right) = 0$$

となる．(2.1) の両辺の期待値をとり，上の不等式を用いれば補題は示せた．, □

2.5 マルチンゲール収束定理

定理 2.5 $X = \{X_n\}$ は優マルチンゲールとし，$\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ とする．このとき，可積分確率変数 X_∞ が存在して，$X_n \xrightarrow{as} X_\infty$ となる．

証明 $a < b$ を固定し，

$$F_{a,b} = \{\omega \in \Omega;\ \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < a \le b < \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\}$$

とおく．$\lim X_n(\omega)$ が $[-\infty, \infty]$ において存在しなければ，a, b をうまくとって，$\omega \in F_{a,b}$ とできる．さらに，一般性を失わず a, b は有理数としてよい．すると

$$\begin{aligned} F &:= \{\omega \in \Omega:\ X_n(\omega) \text{ は } [-\infty, \infty] \text{ で極限をもたない }\} \\ &= \{\omega \in \Omega:\ \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\} \\ &= \cup_{\{a,b\in\mathbb{Q}^2:\, a<b\}}\{\omega \in \Omega;\ \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < a \le b < \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\} = \cup_{\{a,b\in\mathbb{Q}^2:\, a<b\}} F_{a,b} \end{aligned}$$

となる．しかし

$$F_{a,b} \subset \{\omega \in \Omega:\ U_\infty[a, b](\omega) = \infty\}$$

であるので，$\mathbb{P}(F_{a,b}) > 0$ ならば，単調収束定理より

$$\mathbb{E}[U_n[a, b]] \uparrow \infty$$

となる．しかし，補題 2.1（Doob の上向き横断数補題）から

$$(b-a)\mathbb{E}[U_n[a, b]] \le \mathbb{E}[(X_n - a)^-] \le \mathbb{E}[|X_n - a|] \le \sup_n \mathbb{E}[|X_n|] + |a| < \infty$$

より矛盾．よって，$\mathbb{P}(F_{a,b}) = 0$ となる．したがって，$X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$ は $[-\infty, \infty]$ でほとんど確実に存在する．さらに，Fatou の補題から

$$\mathbb{E}[|X_\infty|] = \mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} |X_n|] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|] \le \sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$$

より X_∞ の可積分性もわかる． □

定理 2.6 $X = \{X_n\}$ は一様可積分マルチンゲールとする．このとき，ある可積分な確率変数 X_∞ が存在して，$X_n \xrightarrow{as} X_\infty$ が成り立つ．さらに，すべての $n \ge 0$ に対して，$X_n = \mathbb{E}(X_\infty | \mathscr{F}_n)$ がほとんど確実に成立する．

証明 $\{X_n\}$ の一様可積分性より，$\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$ となるので，定理 2.5(Doob のマルチンゲール収束定理) より，X_∞ が存在して，$n \to \infty$ のとき，$X_n \xrightarrow{as} X_\infty$ となる．さらに，$\mathbb{E}|X_n - X_\infty| \to 0$ となることもわかる．

つぎに，ほとんど確実に $X_n = \mathbb{E}(X_\infty | \mathscr{F}_n)$ であることを示す．$F \in \mathscr{F}_n$ と $r \ge n$ に対して，マルチンゲール性より

$$\mathbb{E}[X_r \mathbb{I}_F] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_r \mathbb{I}_F | \mathscr{F}_n)] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_F \mathbb{E}(X_r | \mathscr{F}_n)] = \mathbb{E}(X_n \mathbb{I}_F) \tag{2.2}$$

となる．しかし，

$$|\mathbb{E}(X_r \mathbb{I}_F) - \mathbb{E}(X_\infty \mathbb{I}_F)| \le \mathbb{E}[|X_r - X_\infty| \mathbb{I}_F] \le \mathbb{E}[|X_r - X_\infty|] \to 0, \qquad (r \to \infty)$$

となる．よって，(2.2) において，$r \to \infty$ とすれば，

$$\mathbb{E}(X_n \mathbb{I}_F) = \mathbb{E}(X_\infty \mathbb{I}_F)$$

となる．X_n は $\mathscr{F}_n$–可測なので，条件付期待値の一意性よりほとんど確実に $X_n = \mathbb{E}(X_\infty | \mathscr{F}_n)$ となる． □

注意 2.2 上記の定理の一様可積分な優マルチンゲールへの場合に拡張できる．

補題 2.2 ξ を可積分な確率変数とし，あるフィルトレーション $\{\mathscr{F}_n\}$ に対して，$X_n = \mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_n)$ とおく．このとき，$\{X_n\}$ は一様可積分マルチンゲールである．

証明 一般性を失うことなく，$\xi \geq 0$ と仮定していよい．$X = \{X_n\}$ は一様可積分であることを示す．$|X_n| = |\mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_n)| \leq \mathbb{E}(|\xi||\mathscr{F}_n)$ と任意の $M > 0$ に対して，$\{|X_n| > M\} \in \mathscr{F}_n$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned} M\mathbb{P}(|X_n| > M) &\leq \mathbb{E}(|X_n|\,\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}) \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}(|\xi||\mathscr{F}_n)\,\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[|\xi|\,\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}|\mathscr{F}_n)]] = \mathbb{E}[|\xi|\,\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}] \leq \mathbb{E}[|\xi|] \end{aligned}$$

である．したがって，

$$\sup_n \mathbb{P}(|X_n| > M) \leq \frac{\mathbb{E}[|\xi|]}{M} \to 0, \qquad (M \to \infty) \tag{2.3}$$

となり，$M \to \infty$ のとき

$$\sup_n \mathbb{E}[|X_n|\,\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}] \leq \sup_n \mathbb{E}[\mathbb{E}(|\xi||\mathscr{F}_n)\,\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}] = \sup_n \mathbb{E}[\mathbb{E}(|\xi|\,\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}|\mathscr{F}_n)] = \sup_n \mathbb{E}[|\xi|\,\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}] \to 0$$

が ξ の可積分性と (2.3) から[(2-3)]わかる．よって，一様可積分性が示せた． □

系 2.1 ξ を可積分な確率変数とし，あるフィルトレーション $\{\mathscr{F}_n\}$ に対して，$X_n = \mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_n)$ とおく．このとき，$n \to \infty$ のとき，$X_n \xrightarrow{as} \mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_\infty)$ かつ $\mathbb{E}[|X_n - \mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_n)|] \to 0$ となる．

証明 補題 2.2 より $\{X_n\}$ は一様可積分になる．$X = \{X_n\}$ は一様可積分マルチンゲールなので，ある確率変数 X_∞ が存在して，$n \to \infty$ のとき，$X_n \xrightarrow{as} X_\infty$ かつ $\mathbb{E}|X_n - X_\infty| \to 0$ となり，すべての n について，ほとんど確実に $X_n = \mathbb{E}(X_\infty|\mathscr{F}_n)$ となる．$X_\infty = \limsup_n X_n$ とすれば，$\mathscr{F}_\infty$–可測となる．また，すべての n について

$$\mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_n) = X_n = \mathbb{E}(X_\infty|\mathscr{F}_n)$$

がほとんど確実に成立する．あとは，ほとんど確実に $X_\infty = \xi$ となることを示せばよい．したがって，$F \in \mathscr{F}_n$ に対して，条件付期待値の定義から

$$\mathbb{E}(\xi\,\mathbb{I}_F) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_n)\,\mathbb{I}_F] = \mathbb{E}(X_n\,\mathbb{I}_F) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_\infty|\mathscr{F}_n)\,\mathbb{I}_F] = \mathbb{E}(X_\infty\,\mathbb{I}_F)$$

となるので，$F \in \cup_{n=1}^\infty \mathscr{F}_n$ に対して

$$\mathbb{E}(\xi\,\mathbb{I}_F) = \mathbb{E}(X_\infty\,\mathbb{I}_F)$$

を得る．

いま，$(\Omega, \mathscr{F}_\infty)$ 上の測度 μ_1 と μ_2 をつぎのように定める：

$$\mu_1(F) := \mathbb{E}(\xi\,\mathbb{I}_F), \qquad \mu_2(F) := \mathbb{E}(X_\infty\,\mathbb{I}_F)$$

とする．μ_1 と μ_2 は $\cup_{n=1}^\infty \mathscr{F}_n$ 上で一致し，$\cup_{n=1}^\infty \mathscr{F}_n$ 上で π–系なので，μ_1 と μ_2 は $\sigma(\cup_{n=1}^\infty \mathscr{F}_n) = \mathscr{F}_\infty$ 上で一致する．さらに，$\{\xi > X_\infty\} \in \mathscr{F}_\infty$ なので，

$$\mathbb{E}[(\xi - X_\infty)\,\mathbb{I}_{\{\xi > X_\infty\}}] = \mu_1(\{\xi > X_\infty\}) - \mu_2(\{\xi > X_\infty\}) = 0$$

となり，$\mathbb{P}(\xi > X_\infty) = \mathbb{P}((\xi - X_\infty)\,\mathbb{I}_{\{\xi > X_\infty\}} = 0) = 1$ となる．同様[(2-4)]にすれば，$\mathbb{P}(\xi < X_\infty) = 1$ もいえるので，$\mathbb{P}(\xi = X_\infty) = 1$ となる．よって，定理は証明された． □

定理 2.7 $p>1$ とする．$X=\{X_n\}$ はマルチンゲールで $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^p<\infty$ とする．このとき，確率変数 X_∞ が存在して，$n\to\infty$ のとき，$X_n \xrightarrow{as} X_\infty$ かつ $\mathbb{E}|X_n-X_\infty|^p\to 0$ となる．

証明 まず，定理 1.14 の条件 (1) と (2) を示せば．$\{X_n\}$ は一様可積分であることがわかる．Hölder の不等式(2-5) より $\mathbb{E}|X_n|\le\{\mathbb{E}|X_n|^p\}^{1/p}$ となるので，$\sup_n \mathbb{E}|X_n|<\infty$ となるとなるので，定理 1.14 の条件 (1) は確認できた．条件 (2) を確認するために，任意の $\epsilon>0$ を取る．さらに，$M:=\sup_n \mathbb{E}|X_n|^p<\infty$ とおく．ここで，ある x_0 が存在して，すべての $x>x_0$ に対して，$|x|^p>|x|(2M/\epsilon)$ となることに注意する．いま，$\delta=\epsilon/(2x_0)$ とおく．このとき，$\mathbb{P}(A)<\delta$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X_n|\,\mathbb{I}_A\right] &= \mathbb{E}\left[|X_n|\,\mathbb{I}_{A\cap\{|X_n|>x_0\}}\right]+\mathbb{E}\left[|X_n|\,\mathbb{I}_{A\cap\{|X_n|\le x_0\}}\right]\\
&< \frac{\epsilon}{2M}\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right]+x_p\mathbb{P}(A)=\epsilon
\end{aligned}
$$

となる．したがって，定理 1.14 より $\{X_n\}$ は一様可積分となる．さらに，定理 2.6 からある確率変数 X_∞ が存在して，$n\to\infty$ のとき，$X_n\xrightarrow{as}X_\infty$ となり，$\mathbb{E}|X_n-X_\infty|\to 0$ ですべての n に対してほとんど確実に $X_n=\mathbb{E}(X_\infty|\,\mathscr{F}_n)$ となる．さらに，$Y_n=|X_n|^p$ とおけば，$\{Y_n\}$ は劣マルチンゲールなので，定理 2.5 から $Y_\infty=|X_\infty|^p$ は可積分となり，Jensen の不等式から

$$
|X_n|^p=|\mathbb{E}(X_\infty|\,\mathscr{F}_n)|^p\le\mathbb{E}(|X_\infty|^p|\,\mathscr{F}_n)<\infty
$$

となる．ここで有界収束定理を使えば，

$$
\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n|^p=\mathbb{E}|X_\infty|^p
$$

を得る． □

定理 2.8 $\eta_1,\eta_2,\ldots$ を独立な確率変数列とし，$\mathscr{T}_n=\sigma(\eta_n,\eta_{n+1},\ldots)$ とする．さらに，$\mathscr{T}=\cap_{n=1}^\infty\mathscr{T}_n$ とおく．このとき，任意の $A\in\mathscr{T}$ に対して

$$
\mathbb{P}(A)=\ 0 \text{ または } 1
$$

となる．

証明 $\mathscr{F}_n=\sigma(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ とし，任意の $A\in\mathscr{T}$ に対して

$$
\xi_n=\mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\,\mathscr{F}_n)
$$

とおく．補題 2.2 から $\{\xi_n\}$ は一様可積分マルチンゲールとなり，定理 2.6 からある可積分な確率変数 ξ_∞ が存在して，ほとんど確実に $\xi_\infty=\lim_{n\to\infty}\xi_n$ とすべての n についてほとんど確実に $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\,\mathscr{F}_n)=\xi_n=\mathbb{E}(\xi_\infty|\,\mathscr{F}_n)$ が成立する．したがって，系 2.1 の後半部分の証明(2-6)と同様にすれば，ほとんど確実に $\xi=\mathbb{I}_A$ となる．

η_n は独立な確率変数なので，$\mathscr{F}_n$ と $\mathscr{T}_{n+1}$ は独立である．さらに，$\mathscr{T}\subset\mathscr{T}_n$ から $\mathscr{T}$ と $\mathscr{F}_n$ も独立である．$\mathbb{I}_A$ は $\mathscr{T}$–可測なので，$\mathscr{F}_n$ とは独立なので，

$$
\mathbb{P}(A)^2=\mathbb{E}(\mathbb{I}_A)\mathbb{E}(\mathbb{I}_A)=\mathbb{E}(\mathbb{I}_A)\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\,\mathscr{F}_n)\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_A\mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\,\mathscr{F}_n)\right]
$$

となる．一方，$\mathbb{E}\left[|\mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\,\mathscr{F}_n)-\mathbb{I}_A)|\right]=\mathbb{E}|\xi_n-\xi|\to 0$ から

$$
|\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_A\mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\,\mathscr{F}_n)\right]-\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_A\right]|\le\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_A|\mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\,\mathscr{F}_n)-\mathbb{I}_A|\right]\le\mathbb{E}\left[|\mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\,\mathscr{F}_n)-\mathbb{I}_A)|\right]\to 0
$$

から

$$
\mathbb{P}(A)^2=\mathbb{P}(A)
$$

を得る(2-7)．したがって，$\mathbb{P}(A)=0,1$ となる． □

2.6 後ろ向きマルチンゲール収束定理

ここでは後ろ向きのフィルトレーション

$$\mathscr{F} \supset \mathscr{F}_0 \supset \mathscr{F}_1 \supset \cdots \supset \mathscr{F}_\infty = \cap_{r=0}^{\infty} F_r$$

を考える．

定義 2.5 後ろ向きフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}, \mathbb{P})$ 上の適合で可積分な確率過程を $X = \{X_n\}$ とする．このとき，
(1) すべての $m \leq n$ に対して，ほとんど確実に $\mathbb{E}(X_m | \mathscr{F}_n) = X_n$ のとき，X は後ろ向きマルチンゲールという．
(2) すべての $m \leq n$ に対して，ほとんど確実に $\mathbb{E}(X_m | \mathscr{F}_n) \geq X_n$ のとき，X は後ろ向き劣マルチンゲールという．
(3) すべての $m \leq n$ に対して，ほとんど確実に $\mathbb{E}(X_m | \mathscr{F}_n) \leq X_n$ のとき，X は優後ろ向きマルチンゲールという．

定理 2.9 $X = \{X_n\}$ は一様可積分な後ろ向きマルチンゲールとする．このとき，ある確率変数 X_∞ が存在して，$n \to \infty$ のとき，$X_n \xrightarrow{as} X_\infty$ かつ $\mathbb{E}|X_n - X_\infty \to 0$ となる．さらに，すべての m に対して，ほとんど確実に $\mathbb{E}(X_m | \mathscr{F}_\infty) = X_\infty$ となる．

証明 $a < b$ を固定し，

$$F_{a,b} = \{\omega \in \Omega;\ \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < a \leq b < \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\}$$

とおく．$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ が $[-\infty, \infty]$ において存在しないならば，a と b をうまく定めて $\omega \in F_{a,b}$ とできる．さらに，一般性を失うことなく a, b を有理数と考えてよい．すると

$$\begin{aligned}
F &:= \{\omega \in \Omega :\ X_n(\omega) \text{ は } [-\infty, \infty] \text{ で極限をもたない }\} \\
&= \{\omega \in \Omega :\ \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\} \\
&= \cup_{\{a,b \in \mathbb{Q}^2 :\, a<b\}} \{\omega \in \Omega;\ \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < a \leq b < \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\} = \cup_{\{a,b \in \mathbb{Q}^2 :\, a<b\}} F_{a,b}
\end{aligned}$$

となる．$X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0$ はマルチンゲールになるので，$U_n[a, b]$ を上向き横断数とすれば，

$$F_{a,b} \subset \{\omega \in \Omega :\ U_\infty[a, b](\omega) = \infty\}$$

であるので，$\mathbb{P}(F_{a,b}) > 0$ ならば，単調収束定理より

$$\mathbb{E}[U_n[a, b]] \uparrow \infty$$

となる．しかし，補題 2.1（Doob の上向き横断数補題）から

$$(b-a)\mathbb{E}[U_n[a, b]] \leq \mathbb{E}[(X_n - a)^-] \leq \mathbb{E}[|X_n - a|] \leq \sup_n \mathbb{E}[|X_n|] + |a| < \infty$$

より，一様可積分性と矛盾する．よって，$\mathbb{P}(F_{a,b}) = 0$ となる．したがって，$X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$ は $[-\infty, \infty]$ でほとんど確実に存在する．さらに，Fatou の補題から

$$\mathbb{E}[|X_\infty|] = \mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} |X_n|] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|] \leq \sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$$

となり，X_∞ は可積分だえる．一様可積分性と $X_n \xrightarrow{as} X_\infty$ から $n \to \infty$ のとき $\mathbb{E}|X_n - X_\infty| \to 0$ もわかる．

つぎに，ほとんど確実に $\mathbb{E}(X_m|\mathscr{F}_\infty)=X_\infty$ となることを示そう．$n\ge m$ に対して $F\in\mathscr{F}_n$ とする．後ろ向きマルチンゲール性から

$$\mathbb{E}(X_m\,\mathbb{I}_F)=\mathbb{E}(X_n\,\mathbb{I}_F)$$

となること(2-8)がわかる．特に，$F\in\mathscr{F}_\infty$ に対して，$n\to\infty$ とすれば，

$$\mathbb{E}(X_m\,\mathbb{I}_F)=\mathbb{E}(X_\infty\,\mathbb{I}_F)$$

となる(2-9)．よって，条件付期待値の定義からほとんど確実に $X_m=\mathbb{E}(X_\infty|\mathscr{F}_n)$ を得る． □

系 2.2 $\{\mathscr{F}_n\}$ を後ろ向きフィルトレーションし，ξ は可積分とする．$n\to\infty$ のとき，$\mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_n)\xrightarrow{as}\mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_\infty)$ かつ $\mathbb{E}|\mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_n)-\mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_\infty)|\to 0$ が成立する．ただし，$\mathscr{F}_\infty=\sigma(\cup_{n=0}^\infty\mathscr{F}_n)$ である．

証明 一般性を失うことなく $\xi\ge 0$ としてよいことに注意する．いま，$X_n=\mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_n)$ とおくと，ξ の可積分性から $\{X_n\}$ は一様可積分になること(2-10)がわかる．よって，$\{X_n\}$ は後ろ向き一様可積分マルチンゲールとなるので，定理 2.9 からある確率変数 X_∞ が存在して，$n\to\infty$ のとき，$X_n\xrightarrow{as}X_\infty$ かつ $\mathbb{E}|X_n-X_\infty|\to 0$ となる．また，すべての n に対してほとんど確実に

$$\mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_n)=X_n=\mathbb{E}(X_\infty|\mathscr{F}_n) \tag{2.4}$$

となる．あとは，X_∞ は $\mathscr{F}_\infty$–可測なので，任意の $F\in\mathscr{F}_\infty$ に対して，

$$\mathbb{E}(\xi\,\mathbb{I}_F)=\mathbb{E}(X_\infty\,\mathbb{I}_F) \tag{2.5}$$

を示せば，条件付期待値の定義からほとんど確実に $\mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_\infty)=X_\infty$ がわかる(2-11)．$F\in\mathscr{F}_\infty$ としたとき，$X_n=\mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_n)\xrightarrow{as}X_\infty$ と $\{X_n\}$ の一様可積分性および $F\in\mathscr{F}_n$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_\infty\,\mathbb{I}_F] &= \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty}X_n\,\mathbb{I}_F]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n\,\mathbb{I}_F]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi|\mathscr{F}_n)\,\mathbb{I}_F]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi\,\mathbb{I}_F|\mathscr{F}_n)]\\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\xi\,\mathbb{I}_F]=\mathbb{E}[\xi\,\mathbb{I}_F]\end{aligned}$$

となり，(2.5) が示せた． □

例 2.4 $X_1,X_2,\dots,X_n$ を独立同一分布に従う確率変数とし，$\mathbb{E}|X_1|<\infty$ を仮定する．$\mu=\mathbb{E}(X_1)$ とし，

$$\bar{X}_n:=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

と表す．$n\to\infty$ のとき，

$$\bar{X}_n\xrightarrow{as}\mu \qquad \text{かつ} \qquad \mathbb{E}|\bar{X}_n-\mu|\to 0$$

が成立することを示そう．そのために

$$\mathscr{F}_n=\sigma(\bar{X}_n,\bar{X}_{n+1},\dots), \qquad \mathscr{F}_\infty=\cap_{n=1}^\infty\mathscr{F}_n$$

とおく．$\mathscr{F}_n$ は $X_1+X_2+\cdots+X_n$ を通してのみ $X_1,\dots,X_n$ に依存するので，$\mathbb{E}(X_i|\mathscr{F}_n)\,(i=1,2,\dots,n)$ は同じである．したがって，

$$\bar{X}_n=\mathbb{E}(\bar{X}_n|\mathscr{F}_n)=\sum_{n=1}^\infty\mathbb{E}(X_i|\mathscr{F}_n)=\mathbb{E}(X_1|\mathscr{F}_n)$$

となる．よって，系 2.2 から $n\to\infty$ のとき，

$$\bar{X}_n\xrightarrow{as}\mathbb{E}(X_1|\mathscr{F}_\infty) \qquad \text{かつ} \qquad \mathbb{E}|\bar{X}_n-\mathbb{E}(X_1|\mathscr{F}_n)|\to 0$$

となる．しかし，Hewitt–Savage の 0–1 法則から $\mathbb{E}(X_1|\mathscr{F}_\infty)=\mathbb{E}(X_1)$ がわかる． □

定理 2.10 $\{\mathscr{F}_n\}$ を後ろ向きフィルトレーションとし，$X=\{X_n\}$ を後ろ向きマルチンゲールとする．このとき，$C:=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\,(X_n)>-\infty$ ならば，$\{X_n\}$ は一様可積分である．

証明 $\{X_n\}$ のを後ろ向きマルチンゲール性と Jensen の不等式から $\{X_n^*\}$ と $\{X_n^-\}$ はともにを後ろ向き劣マルチンゲールになること(2-12)に注意する．

いま，$a>0$ とする．Markov の不等式を使えば，

$$a\mathbb{P}\,(|X_n|>a)\le\mathbb{E}\,|X_n|=-\mathbb{E}\,(X_n)+2\mathbb{E}\,(X_n^+)\le -C+2\mathbb{E}\,(X_1^+)<\infty$$

である．したがって，$a\to\infty$ のとき，

$$\sup_n\mathbb{P}\,(|X_n|>a)\to 0 \tag{2.6}$$

となる．また，後ろ向き劣マルチンゲール性と $\{X_n^+\}\in\mathscr{F}_n$ より

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,[X_n^+\,\mathbb{I}_{\{X_n^+>a\}}] &\le \mathbb{E}\,[\mathbb{E}\,(X_1^+|\,\mathscr{F}_n)\,\mathbb{I}_{\{X_n^+>a\}}]=\mathbb{E}\,[\mathbb{E}\,(X_1^+\,\mathbb{I}_{\{X_n^+>a\}}|\,\mathscr{F}_n)]=\mathbb{E}\,[X_1^+\,\mathbb{I}_{\{X_n^+>a\}}]\\ &\le \mathbb{E}\,[|X_1|\,\mathbb{I}_{\{|X_n|>a\}}]\end{aligned}$$

となるので，X_1 の可積分性と (2.6) から $a\to\infty$ のとき，

$$\sup_n\mathbb{E}\,(X_1\,\mathbb{I}_{\{|X_n|>a\}}]\to 0$$

となること(2-13)がわかる．$\{X_n^+\}$ は一様可積分となる．

つぎに，$\{X_n^-\}$ は一様可積分性を示す．$n>m$ と $a>0$ に対して，$\{X_n\}$ の後ろ向き列マルチンゲール性から

$$\begin{aligned}0 &\ge \mathbb{E}\,[X_n\,\mathbb{I}_{X_n<-a}]=\mathbb{E}\,(X_n)-\mathbb{E}\,[X_n\,\mathbb{I}_{X_n\ge -a}]\ge\mathbb{E}\,(X_n)-\mathbb{E}\,[\mathbb{E}\,(X_m|\,\mathscr{F}_n)\,\mathbb{I}_{X_n\ge -a}]\\ &= \mathbb{E}\,(X_n)-\mathbb{E}\,[X_m\,\mathbb{I}_{X_n\ge -a}]=\mathbb{E}\,(X_n)-\mathbb{E}\,(X_m)+\mathbb{E}\,[X_m\,\mathbb{I}_{X_n<-a}]\end{aligned}$$

となる．$\{\mathbb{E}\,(X_n)\}$ が収束していることと後ろ向き劣マルチンゲールであること(2-14)から，任意の $\epsilon>0$ に対して，m を十分におおきくとれば，

$$0\le\mathbb{E}\,(X_m)-\mathbb{E}\,(X_n)\le\frac{\epsilon}{2}$$

が $n>m$ なるあらゆる n に対して成立する．そのような m を固定する．この m に対して，

$$\sup_{n>m}\mathbb{E}\,[|X_m|\,\mathbb{I}_{\{X_n<-a\}}]\le\frac{\epsilon}{2}$$

が成立するように $a>0$ を選らぶこと(2-15)ができる．したがって，上記で選んだ m と a に対して

$$\sup_{n>m}\mathbb{E}\,[X_n^-\,\mathbb{I}_{\{X_n^->a\}}]\le\sup_{n>m}\big[\mathbb{E}\,(X_m)-\mathbb{E}\,(X_n)+\mathbb{E}\,[X_n^-\,\mathbb{I}_{\{X_n^->a\}}]\big]\le\epsilon$$

となる．よって，$\{X_n^-\}$ も一様可積分となる． □

2.7 最適停止時間

$\{\mathscr{F}_n\}$ をフィルトレーションとする．T を $\mathscr{F}_n$–停止時間とする．停止時間 T に対して，集合族 $\mathscr{F}_T$ を

$$\mathscr{F}_T=\{A\in\mathscr{F}:\ \text{すべての}\ n\in\bar{\mathbb{Z}}_+\ \text{に対し}\ A\cap\{T\le n\}\subset\mathscr{F}_n\}$$

で定義する．

定理 2.11 集合族 $\mathscr{F}_T$ は σ–集合族である．

証明 明らかに $\Omega\cap\{T\le n\}=\{T\le n\}\subset\mathscr{F}_n$ であるから $\Omega\in\mathscr{F}_T$ である．また，$A\in\mathscr{F}_T$ のとき $A^c\cap\{T\le n\}=(\Omega\setminus A)\cap\{T\le n\}=\{T\le n\}\setminus(A\cap\{T\le n\})\in\mathscr{F}_n$ となるから $A^c\in\mathscr{F}_T$ となる．最後に，$A_i\in\mathscr{F}_T\,(i=1,2\ldots)$ ならば，$(\cup_{i=1}^\infty A_i)\cap\{T\le n\}=\cup_{i=1}^\infty(A\cap\{T\le n\})\in\mathscr{F}_n$ となる．したがって，$\cup_{i=1}^\infty\in\mathscr{F}_T$ となる． □

系 2.3 S と T を停止時間とする．このとき
(1) $S\le T$ ならば，$\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$．
(2) $\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{S\wedge T}$．

証明 (1) $F\in\mathscr{F}_S$ に対して，$S\le T$ に注意すれば

$$\begin{aligned}F\cap\{T\le n\} &= F\cap\{T\le n\}\cap\{S\le T\}=\cup_{k=1}^n\big(F\cap\{T\le n\}\cap\{S\le T\}\cap\{T=k\}\big)\\ &= \cup_{k=1}^n\big(F\cap\{S\le k\}\cap\{T=k\}\big)=\cup_{k=1}^n\big((F\cap\{S\le k\})\cap\{T=k\}\big)\in\mathscr{F}_n\end{aligned}$$

となること(2-16)がわかる．
(2) $S\ge S\wedge T$ と $T\ge S\wedge T$ と (1) から $\mathscr{F}_T\cap\mathscr{F}_S\supset\mathscr{F}_{S\wedge T}$ となる．あとは $\mathscr{F}_T\cap\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_{S\wedge T}$ を示せばよい．そのために，$F\in\mathscr{F}_T\cap\mathscr{F}_S$ に対して $F\cap\{S\wedge T\le n\}=(F\cap\{S\le n\})\cap(F\cap\{T\le n\})\in\mathscr{F}_n$ よりわかる． □

定理 2.12 Y を可積分な確率変数とし，S を任意の停止時間とする．このとき，

$$X_S=\mathbb{E}\,(Y|\,\mathscr{F}_S)$$

となる．さらに，T を $S\le T$ なる任意の停止時間とし，$X_T=\mathbb{E}\,(Y|\,\mathscr{F}_T)$ としたとき，ほとんど確実に

$$\mathbb{E}\,(X_T|\,\mathscr{F}_S)=X_S$$

が成立する．

証明 まず，X_S が可積分であることを示す．$\{S=n\}\in\mathscr{F}_n$ と Jensen の不等式から $\mathbb{E}\,[|X_S|]\le\mathbb{E}\,[|Y|]<\infty$ となること(2-17)がわかる．また，任意の $F\in\mathscr{F}_S$ に対して，$\mathbb{E}\,(X_S\,\mathbb{I}_F)=\mathbb{E}\,(Y\,\mathbb{I}_F)$ となること(2-18)がわかる．最後に，$\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$ に注意すれば，$X_S=\mathbb{E}\,(Y|\,\mathscr{F}_S)=\mathbb{E}\,[\mathbb{E}\,(Y|\,\mathscr{F}_T)|\,\mathscr{F}_S]=\mathbb{E}\,(X_T|\,\mathscr{F}_S)$ がわかる． □

定理 2.13 S と T を $S\le T$ なる有界な停止時間とする．このとき，任意の劣マルチンゲール $\{X_n\}$ に対して，ほとんど確実に

$$\mathbb{E}\,(X_T|\,\mathscr{F}_S)\ge X_S$$

が成立する．

証明 $k\ge j\,(k,j\in\mathbb{Z}^+)$ とする．$F\in\mathscr{F}_S$ とし，各 j に対して，$F_j:=F\cap\{S=j\}$ とおく．$\{T>k\}=\{T\le k\}^c\in\mathscr{F}_K$ と $F_j\in\mathscr{F}_j\subset\mathscr{F}_k$ なので，$F_j\cap\{T>k\}\in\mathscr{F}_k$ となる．これらのことと $\{X_n\}$ の劣マルチンゲール性から $\mathbb{E}\,[X_k\,\mathbb{I}_{F_j\cap\{T>k\}}]\le\mathbb{E}\,[X_{k+1}\,\mathbb{I}_{F_j\cap\{T>k\}}]$ となること(2-19)がわかる．したがって，

$$\mathbb{E}\,[X_k\,\mathbb{I}_{F_j\cap\{T\ge k\}}]\;=\;\mathbb{E}\,[X_k\,\mathbb{I}_{F_j\cap\{T=k\}}]+\mathbb{E}\,[X_k\,\mathbb{I}_{F_j\cap\{T>k\}}]\le\mathbb{E}\,[X_k\,\mathbb{I}_{F_j\cap\{T=k\}}]+\mathbb{E}\,[X_{k+1}\,\mathbb{I}_{F_j\cap\{T>k\}}]$$

となる．これを書き直せば

$$\mathbb{E}\,[X_k\,\mathbb{I}_{F_j\cap\{T\ge k\}}]-\mathbb{E}\,[X_{k+1}\,\mathbb{I}_{F_j\cap\{T\ge k+1\}}]\le\mathbb{E}\,[X_k\,\mathbb{I}_{F_j\cap\{T=k\}}]$$

となる[2-20]．m を T の上界としたとき，上の式を j から m まで k について加えれば，

$$\mathbb{E}\left[X_S\,\mathbb{I}_{F_j\cap\{T\geq j\}}\right]-\mathbb{E}\left[X_{m+1}\,\mathbb{I}_{F_j\cap\{T\geq m+1\}}\right]\leq\mathbb{E}\left[X_T\,\mathbb{I}_{F_j\cap\{j\leq T\leq m\}}\right] \tag{2.7}$$

となる．$F_j\cap\{T\geq m+1\}=\emptyset$ と $F_j\cap\{T\geq j\}=F_j$ [2-21]なので，

$$\mathbb{E}\left[X_S\,\mathbb{I}_{F_j}\right]\leq\mathbb{E}\left[X_T\,\mathbb{I}_{F_j}\right]$$

を得る．さらに，j について 1 から m まで上の式の片々を加えれば，任意の $F\in\mathscr{F}_S$ に対して

$$\mathbb{E}\left[X_S\,\mathbb{I}_F\right]\leq\mathbb{E}\left[X_T\,\mathbb{I}_F\right] \tag{2.8}$$

が成立することがわかる．最後に，X_S と $\mathbb{E}\left(X_T|\,\mathscr{F}_S\right)$ が $\mathscr{F}_S$–可測であること[2-22]に注意して，$F=\{X_S-\mathbb{E}\left(X_T|\,\mathscr{F}_S\right)>0\}$ とおき，(2.8) に代入すれば

$$\mathbb{E}\left[\{X_S-\mathbb{E}\left(X_T|\,\mathscr{F}_S\right)\}\,\mathbb{I}_{\{X_S-\mathbb{E}\left(X_T|\,\mathscr{F}_S\right)>0\}}\right]=0$$

を得る[2-23]．したがって，

$$1=\mathbb{P}\left(\{X_S-\mathbb{E}\left(X_T|\,\mathscr{F}_S\right)\}\,\mathbb{I}_{\{X_S-\mathbb{E}\left(X_T|\,\mathscr{F}_S\right)>0\}}\right]=0)=\mathbb{P}\left(X_S-\mathbb{E}\left(X_T|\,\mathscr{F}_S\right)\leq 0\right)$$

がわかる．よって，定理は証明された． □

系 2.4 $\{X_n\}$ を劣マルチンゲールとし，S を任意の停止時間とする．このとき，$\{X_{S\wedge n}\}$ は $\mathscr{F}_{S\wedge n}$–劣マルチンゲールとなる．

証明　定理 より $\mathbb{E}\left(X_{S\wedge(n+1)}|\,\mathscr{F}_{S\wedge n}\right)\geq X_{S\wedge n}$ となる．また，すべての $n\in\mathbb{Z}^+$ に対して $\mathbb{E}\,|X_{S\wedge n}|\leq\sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}\,|X_i|<\infty$ となる．よって，系は証明された． □

定理 2.14 $\{X_n\}$ を一様可積分劣マルチンゲールとし，S と T を $S\leq T$ なる任意の停止時間とする．このとき，ほとんど確実に

$$\mathbb{E}\left(X_T|\,\mathscr{F}_S\right)\geq X_S \tag{2.9}$$

が成立する．

証明　まず，$\{X_n\}$ は一様可積分劣マルチンゲールで $X_n\leq 0$ とし，$X_\infty=0$ と仮定する．すべての $m\in\mathbb{N}$ に対して，(2.7) は成立する．しかし，左辺の 2 項目の期待値は非正なので，$F\in\mathscr{F}_S$ に対して，$F_j:=F\cap\{S=j\}$ としたとき，

$$\mathbb{E}\left(X_S\,\mathbb{I}_{F_j}\right)\leq\mathbb{E}\left(X_T\,\mathbb{I}_{F_j\cap\{T\leq m\}}\right)$$

となる．上の期待値は 0 以下なので，これらの期待値は常に定義されること[2-24]に注意して，$m\to\infty$ とし，さらに，$j\in\mathbb{N}$ について足し合わせれば，

$$\mathbb{E}\left(X_S\,\mathbb{I}_{F\cap\{S<\infty\}}\right)\leq\mathbb{E}\left(X_T\,\mathbb{I}_{F\cap\{T<\infty\}}\right)$$

となる．しかし，$X_\infty=0$ に注意して，

$$\mathbb{E}\left(X_S\,\mathbb{I}_{F\cap\{S=\infty\}}\right)=\mathbb{E}\left(X_\infty\,\mathbb{I}_{F\cap\{S=\infty\}}\right)=\mathbb{E}\left(X_\infty\,\mathbb{I}_{F\cap\{T=\infty\}}\right)=\mathbb{E}\left(X_T\,\mathbb{I}_{F\cap\{T=\infty\}}\right)$$

となるので，$\mathbb{E}(X_S \mathbb{I}_F) \le \mathbb{E}(X_T \mathbb{I}_F)$ を得る．これより，証明の冒頭の仮定もとで

$$X_S \le \mathbb{E}(X_T | \mathscr{F}_S)$$

が成立することが示せた．

つぎに，X_S と X_T が可積分であることを示す．仮定から $X_n \le X_\infty$ (2-25)なので，$X_S \ge \limsup_{n\to\infty} X_{S\wedge n}$ となる．したがって，Fatou の補題より

$$\mathbb{E}(X_S) \ge \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} X_{S\wedge n}) \ge \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{S\wedge n})$$

となる 1 と $S \wedge n$ は有界な停止時間で $1 \le S \wedge n$ となるので，定理 2.7 から

$$\mathbb{E}(X_{S\wedge n} | \mathscr{F}_1) \ge X_1$$

を得る．これより

$$\mathbb{E}(S_{S\wedge n}) \ge \mathbb{E}(X_1) > -\infty$$

となり，$X_S \le 0$ に注意すれば，$\mathbb{E}(X_S)$ が可積分であることがわかる．

最後に，以上の結果を利用して，$\{X_n\}$ を一様可積分劣マルチンゲールとして，2.9) を示す．

$$X_n' = \mathbb{E}(X_\infty | \mathscr{F}_n), \qquad X_n'' = X_n - X_n'$$

とおく．すると $\{X_n'\}$ は一様可積分な $\{\mathscr{F}_n\}$–劣マルチンゲールとなることが補題 2.2 からわかる．また，$\{X_n\}$ の劣マルチンゲール性から

$$X_n' = \mathbb{E}(X_\infty | \mathscr{F}_n) \ge X_n$$

となる．よって，$X_n'' \le 0$ となる．また，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}'' | \mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X_{n+1}' | \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathscr{F}_n) - \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_\infty | \mathscr{F}_{n+1}) | \mathscr{F}_n] \\ &\ge X_n - \mathbb{E}(X_\infty | \mathscr{F}_n) = X_n - X_n' \end{aligned}$$

となり，$\{X_n''\}$ は一様可積分劣マルチンゲールとなる．さらに，

$$\lim_{n\to\infty} X_n'' = \lim_{n\to\infty} X_n - \lim_{n\to\infty} X_n' = X_\infty - X_\infty = 0$$

となる．しがかって，$\{X_n''\}$ は最初に仮定した劣マルチンゲールの仮定をみたすことに注意すれば，

$$\mathbb{E}(X_T | \mathscr{F}_S) - \mathbb{E}(X_T' | \mathscr{F}_S) = \mathbb{E}(X_T'' | \mathscr{F}_S) \ge X_S'' = X_S - X_S'$$

となる．$\{X_n'\}$ に対して，定理 **??** を用いれば，$\mathbb{E}(X_T' | \mathscr{F}_S) = X_S'$ となるので，上の式の両辺の期待値をとれば，

$$\mathbb{E}(X_T | \mathscr{F}_S) \ge X_S$$

を得る． □

2.8 マルチンゲール不等式

補題 2.3 $X = \{X_n\}$ を劣マルチンゲールとする．このとき，すべての $x \ge 0$ と $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$x\,\mathbb{P}\left(\max_{1\le i\le n} X_i \ge x\right) \le \mathbb{E}[X_n \mathbb{I}_{\max X_i \ge x}] \le \mathbb{E} X_n$$

が成り立つ．

証明 高いに排反な事象の和に事象 $\{\max_{1\le i\le n} X_i \ge x\}$ を分割する：

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \{X_0 \ge x\},\, F_1 = \{X_0 < x,\, X_1 \ge x\},\, F_2 = \{X_0 < x,\, X_1 < x,\, X_2 \ge x\} \\
&\quad ,\dots, \\
F_n &= \{X_0 < x,\, X_1 < x,\, \dots,\, X_{n-1} < x,\, X_n \ge 0\}
\end{aligned}
$$

$F_i \in \mathscr{F}_i\,(i = 0, 1, \dots, n)$ なので，劣マルチンゲールの性質と F_i 上で $X_i \ge x$ より $\mathbb{E}\,(X_n\,\mathbb{I}_{F_i}) \ge x\mathbb{E}\,[\mathbb{I}_{F_i}] = x\mathbb{P}\,(F_i)$ となる(2-26)．これより

$$\mathbb{E}\,[X_n\,\mathbb{I}_{\max X_i \ge x}] = \mathbb{E}\,[X_n\,\mathbb{I}_{\cup_{i=0}^n F_i}] = \sum_{i=0}^n \mathbb{E}\,(X_n\,\mathbb{I}_{F_i}) \ge x\sum_{i=0}^n \mathbb{P}\,(F_i) = x\mathbb{P}\left(\cup_{i=0}^n F_i\right) = x\mathbb{P}\,(\max X_i \ge x)$$

となることから補題は示せた． □

定理 2.15 $X = \{X_n\}$ を非負値劣マルチンゲールとする．このとき，任意の $p > 1$ かつ $p^{-1} + q^{-1} = 1$ とすべての $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$\left\{\mathbb{E}\,\Big|\max_{1\le i\le n} X_i\Big|^p\right\}^{1/p} \le q\{\mathbb{E}\,|X_n|^p\}^{1/p}$$

が成立する．さらに，$\sup_n \mathbb{E}\,|X_n|^p < \infty$ のとき，ある確率変数 X_∞ が存在して

$$\mathbb{E}\,|X_n - X_\infty|^p \to 0$$

かつ

$$\left\{\mathbb{E}\,\Big|\sup_n X_i\Big|^p\right\}^{1/p} \le q\{\mathbb{E}\,|X_\infty^p\}^{1/p} = \sup_n q\{\mathbb{E}\,|X_n^p\}^{1/p}$$

となる．

証明 $Y_n = \max_{1\le i\le n} X_i$ とおく．すべての $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$\mathbb{E}\,Y_n^p \le \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,X_n^p < \infty$ に注意して Fubini の定理と補題 2.3 を用いれば

$$\mathbb{E}\,Y_n^p = \int_0^\infty px^{p-1}\mathbb{P}\,(Y_n \ge x)\,dx \le \int_0^\infty px^{p-2}\mathbb{E}\,(X_n\,\mathbb{I}_{\{Y_n\ge x\}})\,dx$$

となること(2-27)がわかる．さらに，Fubini の定理と Hölder の不等式を用いれば

$$\int_0^\infty px^{p-2}\mathbb{E}\,(X_n\,\mathbb{I}_{\{Y_n\ge x\}})\,dx \le q\{\mathbb{E}\,(X_n^p)\}^{1/p}\{\mathbb{E}\,Y_n^{q(p-1)}\}^{1/q}$$

となること(2-28)がわかる．したがって

$$\mathbb{E}\,Y_n^p \le q\{\mathbb{E}\,(X_n^p)\}^{1/p}\{\mathbb{E}\,Y_n^{q(p-1)}\}^{1/q} = q\{\mathbb{E}\,(X_n^p)\}^{1/p}\{\mathbb{E}\,Y_n^p\}^{1/q}$$

を得る(2-29)．これを整理すれば

$$\{\mathbb{E}\,Y_n^p\}^{(1/p)} \le q\{\mathbb{E}\,Y_n\}^{(1/p)} \tag{2.10}$$

を得る．

X は非負値劣マルチンゲールなので，X^p も非負値劣マルチンゲールとなる．仮定より $\sup_n \mathbb{E}\,|X_n|^p < \infty$ なので，定理 1.9(マルチンゲール収束定理) から，ある確率変数 X_∞ が存在して，$X_n \xrightarrow{as} X_\infty$ となる．さらに，

$$\mathbb{E}\,(X_n^p) = \mathbb{E}\,[\mathbb{E}\,(X_n^p|\,\mathscr{F}_m)] \ge \mathbb{E}\,(X_m^p)$$

より $\{\mathbb{E}\,X_n^p\}_{n=0}^\infty$ は非減少列となる．また，定義より $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ は非減少列なので単調収束定理と (2.10) から

$$\mathbb{E}\,[\sup_n X_n^p] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty}\max_{1\le i\le n} X_i^p\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} Y_n\right] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\,[Y_n^p] \le q^p \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\,X_n^p = q\sup_n \mathbb{E}\,[X_n^p]$$

を得る． □

例 2.5 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立同一分布に従い，X は確率密度関数 f を持つとし，検定問題

$$H_0 : f = p \qquad v.s. \qquad H_1 : f = q$$

を考える．ただし，p と q は与えられた確率密度関数とする．検定統計量として尤度比

$$L_n = \Pi_{i=1}^n \frac{p(X_i)}{q(X_i)}$$

を考える．簡単のために以後はすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $q(x) > 0$ と仮定する．ある数 a に対して

$$\begin{array}{ll} L_n \ge a & \text{ならば，} H_0 \text{ を採択} \\ L_n < a & \text{ならば，} H_1 \text{ を棄却} \end{array}$$

とする．

L_n の収束を調べるために，$\mathscr{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ とおく．$f = q$ の場合（対立仮説が真），

$$\mathbb{E}\,(L_{n+1} | \mathscr{F}_n) = L_n \mathbb{E}\left[\frac{p(X_{n+1})}{q(X_{n+1})}\middle|\mathscr{F}_n\right] = L_n \int_{-\infty}^\infty \frac{p(x)}{q(x)} q(x)\,dx = L_n \int_{-\infty}^\infty p(x)\,dx = L_n$$

となる．さらに，

$$\mathbb{E}\,|L_n| = \int_{\mathbb{R}^n} \Pi_{i=1}^n \frac{p(x_i)}{q(x_i)} \Pi_{i=1}^n q(x_i) dx_1 \cdots dx_n = 1$$

より $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ は $\{\mathscr{F}_n\}$–マルチンゲールとなる．したがって，マルチンゲール収束定理からある確率変数 L_∞ が存在して，ほとんど確実に

$$L_\infty = \lim_{n\to\infty} L_n$$

となる．

次に，

$$Y_n = \frac{p(X_n)}{q(X_n)}$$

とおき

$$a_n = \mathbb{E}\,Y_n^{(1/2)} \le 1 \qquad \text{と} \qquad \Pi_{i=1}^\infty a_i > 0$$

を仮定したとき，ほとんど確実に $L_\infty = 0$ となることを示す．そのために

$$N_n := \frac{\Pi_{i=1}^n X_i^{1/2}}{\Pi_{i=1}^n a_i}$$

とおく．このとき，