2003 年 4 月 15 日

数学情報ゼミレジュメ (今野)

標本空間と事象

1. 標本点 — 可能な結果
2. 標本空間 — 可能な結果の全体の集合
3. 事象 — 標本空間の部分集合．標本空間自身も事象となり，全事象とよぶ．
   (a) 根元事象 — 標本点ひとつによって構成される事象
   (b) 和事象 — ふたつの事象のどちらかに含まれる根元事象のあつまり
   (c) 積事象 — ふたつの事象の両方に含まれる根元事象のあつまり
   (d) 補事象 — その事象に含まれない根元事象のあつまり
   (e) 空事象 — 標本点を一つも含まず決して起こらない事象
   (f) 排反事象 — 共通部分を持たない事象．すなわち，一方が起これば，他方が起こらないこと

確率の定義

ある事象 A が起こる確率を $P(A)$ と書く．

確率の公理

1. すべての事象 A に対して，$0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\text{標本空間}) = 1$
3. 互いに排反な事象 $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ に対して

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

が成立

加法定理

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

条件付き確率

B が起こった場合にそのうちにさらに A が起こる確率

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

乗法の定理

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

独立性

事象 A の起こる確率が他の事象 B に影響されないこと

$$P(A) = P(A|B)$$

乗法の定理からこれは

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

と同値

ベイズの公式

A を事象とする．また，H_1 と H_2 も事象とし，$H_1 \cup H_2 = \Omega$（全事象）かつ $H_1 \cap H_2 = \emptyset$（空事象）とする．このとき，

$$P(H_i|\, A) = \frac{P(H_i)P(A|\, H_i)}{P(H_1)P(A|\, H_1) + P(H_2)P(A|\, H_2)}, \qquad i = 1, 2$$

が成立する．

問題 1　〔ベイズの公式の応用〕

$P(C) = 0.005$ とする．また，

	検査の結果		
被験者の状態	陽性　（A）	陰性　（A^c ）	合計
ガンである　（C）	0.95	0.05	1.00
ガンでない　（C^c）	0.05	0.95	1.00

であったとする．すなわち，

$$P(A|\, C) = 0.95,\ P(A^c|\, C) = 0.05,\ P(A|\, C^c) = 0.05,\ \ P(A^c|\, C^c) = 0.95$$

である．

(i) ベイズの公式を用いて $P(C|\, A)$ を求めよ．

(ii) ベイズの公式を用いて $P(C|\, A^c)$ を求めよ．

(iii) $P(A|\, C) = P(A^c|\, C^c) = r\,(0 < r < 1)$ とする．$P(C) = 0.005$ は変わらないとき，$P(C|\, A) \geq 0.90$ となるための r の範囲を求めよ．