2003 年 6 月 24 日

数学情報ゼミレジュメ (今野)

期待値とは

確率変数 X に対して，それがとる値の重み付き平均である．これを $E(X)$ と記す．

$$
\begin{array}{lcll}
E(X) & = & \sum_x xf(x) & \text{〔離散型〕} \\
E(X) & = & \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx & \text{〔連続型〕}
\end{array}
$$

期待値はひとつの定数である．無限和，積分であるから，存在しないこともある．

X の関数 $\phi(X)$ についても期待値が定義できる．

$$
\begin{array}{lcll}
E(\phi(X)) & = & \sum_x \phi(x)f(x) & \text{〔離散型〕} \\
E(\phi(X)) & = & \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x)\,dx & \text{〔連続型〕}
\end{array}
$$

例〔さいころ〕

さいころをふって出る目に対応する確率変数を X の期待値を求めよう．確率分布は

X の値	1	2	3	4	5	6	合計
確率	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1

であった．したがって，

$$
E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}
$$

となる．

例（宝くじの期待値）

等級	当せん金	本数
１等	２億円	１４６本
１等の前後賞	５千万円	２９２本
１等の組み違い賞	十万円	１万４４５４本
２等	１千万円	２９２本
３等	百万円	２９２０本
４等	５万円	３６万５千本
５等	１万円	１４６万本
６等	３百円	７３００万本

この宝くじは１枚３００円で７億３千万枚発売された．したがって，その期待値は

$$
\begin{aligned}
&(2\times 10^8)\cdot\frac{146}{73\times 10^7}+(5\times 10^7)\cdot\frac{292}{73\times 10^7}+(1\times 10^5)\cdot\frac{14454}{73\times 10^7}\\
&+(1\times 10^7)\cdot\frac{146}{73\times 10^7}+(1\times 10^6)\cdot\frac{2920}{73\times 10^7}+(5\times 10^4)\cdot\frac{365\times 10^3}{73\times 10^7}\\
&+(1\times 10^4)\cdot\frac{146\times 10^4}{73\times 10^7}+(3\times 10^3)\cdot\frac{73\times 10^6}{73\times 10^7}\doteq 145
\end{aligned}
$$

となる．

例（指数分布） 確率変数 X の確率密度関数が

$$
f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases},\qquad \lambda>0
$$

で与えらるときの X の期待値を求めよう．

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\int_0^{\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx\\
&= \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

となる．

例（一様分布） 確率変数 X が一様分布

$$
f(x)=\begin{cases}1 & (0\leq x\leq 1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}
$$

に従うとする．このとき，X の期待値と X^2 の期待値を求めよう．

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot 1\,dx=\frac{1}{2}\\
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\int_0^1 x^2\cdot 1\,dx=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

期待値の性質

(a) $\mathrm{E}(\mathrm{c}) = \mathrm{c}$

(b) $\mathrm{E}(\mathrm{X}+\mathrm{c}) = \mathrm{E}(\mathrm{X})+\mathrm{c}$

(c) $\mathrm{E}(\mathrm{c\,X}) = \mathrm{c\,E}(\mathrm{X})$

(d) $\mathrm{E}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathrm{E}(\mathrm{X})+\mathrm{E}(\mathrm{Y})$ （期待値の加法性）

例（さいころを２回投げる） さいころを２回投げたとき，ふたつのさいころの目の和に対応する確率変数を X とする．このとき，確率分布表は

和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

とあった．直接，X の期待値を求めることはできる：

$$\begin{aligned} E(X) &= 2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{5}{36} \\ &\quad +9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{6}=7 \end{aligned}$$

しかし，2 個のさいころの目に対応する確率変数を X_1 と X_2 とすれば，$X=X_1+X_2$ となるので，性質 (d) ととなる．されに，$E(X_1)=7/2$ と $E(X_2)=7/2$ を利用すれば，

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7$$

を得る．

分散と標準偏差

確率変数 X の期待値 $E(X)$ に X がどれだけ集中しているかを測る指標として，X の分散を

$$V(X)=E[(X-E(X))^2]$$

で定義する．また，標準偏差を $\sqrt{V(X)}$ と定義する．期待値の定義から

$$\begin{aligned} V(X) &= \textstyle\sum_x (x-E(X))^2 f(x) && \text{（離散型）} \\ V(X) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-E(X))^2 f(x)\,dx && \text{（連続型）} \end{aligned}$$

となる．$V(X)\geq 0$ であることに注意せよ．また，

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2-2XE(X)+(E(X))^2)=E(X^2)-2E(X)E(X)+(E(X))^2 \\ &= E(X^2)-(E(X))^2 \end{aligned}$$

と書きかえることができる．

分散の性質

$$\begin{array}{lrcl} \text{(a)} & V(c) & = & 0 \\ \text{(b)} & V(X+c) & = & V(X) \\ \text{(c)} & V(cX) & = & c^2V(X) \\ \text{(d)} & V(X) & \geq & 0 \end{array}$$

例（さいころ）

X を 1 個のさいころをふったときの目，Y を 2 個のさいころをふったときの目に対応する確率変数 X_1 と X_2 のふたつの目の平均に対応する確率変数とする．すなわち，$Y = (X_1 + X_2)/2$ である．このとき，

$$E(X_1) = \frac{7}{2}, \qquad E(Y) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) = \frac{7}{2}$$

である．しかし，Y のほうがその期待値に集中している．まず，X_1 の分散を求める：

$$E(X_1^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

より

$$V(X_1) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

となる．つぎに，Y の分散を求める：

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 1^2 \cdot \frac{1}{36} + (3/2)^2 \cdot \frac{2}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + (5/2)^2 \cdot \frac{4}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + (7/2)^2 \cdot \frac{6}{36} \\ &\quad + 4^2 \cdot \frac{5}{36} + (9/2)^2 \cdot \frac{4}{36} + 5^2 \cdot \frac{3}{36} + (11/2)^2 \cdot \frac{2}{36} + 6^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{329}{24} \end{aligned}$$

から

$$V(Y) = \frac{329}{24} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{24}$$

となり，$V(Y) < V(X)$ となる．

例（一様分布の分散）

確率変数 X が一様分布

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

に従うとする．このとき，

$$E(X) = \frac{1}{2} \qquad E(X^2) == \frac{1}{3}$$

であった．したがって，

$$V(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

となる．

標準化変換

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$$

とおく．すると，期待値と分散の性質から

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \frac{1}{\sqrt{V(X)}} E(X - E(X)) = 0 \\
V(Z) &= \left(\frac{1}{\sqrt{V(X)}} \right)^2 V(X - E(X)) = \frac{1}{V(X)} V(X) = 1
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{問題 4}}$ (コインを 3 回投げる実験) 3 回中に表の出た回数に対応する確率変数を X の確率分布表は

X の値	0	1	2	3	合計
確率	1 / 8	3 / 8	3 / 8	1 / 8	1

であった．

(i) X の期待値を求めよ．

(ii) X の分散を求めよ．