2002 年 6 月 24 日

数学情報ゼミレジュメ　(今野)

$$\text{確率分布}\quad \begin{cases} \text{離散型分布} & \text{−−}\quad \text{ベルヌーイ分布・二項分布・ポアソン分布} \\ \text{連続型分布} & \text{−−}\quad \text{一様分布・正規分布・指数分布・ワイブル分布} \end{cases}$$

ベルヌーイ試行と二項分布

２種類の可能な結果（それぞれを S と F と呼ぼう）を生じる実験で，それぞれの結果が起こる確率が p と $1-p$ とし，この実験を同じ条件でかつ独立に n 回繰り返すことを考える．これをベルヌーイ試行という．

X：n 回中 S が x 回，F が $n-x$ 回生じるとすれば，その確率は

$$P(X=x) = f(x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

となる．ただし，0! =! とする．この分布を２項分布といい，$Bi(n, p)$ と書き，特に $Bi(1, p)$ をベルヌーイ分布とよぶ．

２項分布の性質

- $\sum_{x=0}^{n} {}_nC_p p^x (1-p)^{n-x} = 1$
- $E(X) = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_p x p^x (1-p)^{n-x} = np$
- $V(X) = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_p (x-np)^2 p^x (1-p)^{n-x} = np(1-p)$

ポアソン分布

X が確率関数

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

を持つとき，X はポアソン分布に従うという．ただし，$\lambda > 0$ である．

ポアソンの性質

- $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = 1$
- $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$
- $V(X) = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\lambda)^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$

正規分布

正規分布の密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad -\infty < x < \infty$$

正規分布の性質

- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\,dx = \mu$
- $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\,dx = \sigma^2$
- X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき，その線形変換 $Y = aX + b$ は正規分布 $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ に従う.
- $Z = (X-\mu)/\sigma$ は $N(0, 1)$ に従う.

$$\begin{aligned} P(-1 < Z \leq 1) &= \Phi(1) - \Phi(-1) &= 0.6827 \\ P(-2 < Z \leq 2) &= \Phi(2) - \Phi(-2) &= 0.9545 \\ P(-3 < Z \leq 3) &= \Phi(3) - \Phi(-3) &= 0.9973 \end{aligned}$$

ただし，$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}\,ds$

指数分布

確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, \qquad \lambda > 0$$

で定義される分布

指数分布の性質

- $E(X) = \int_0^{\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}$
- $V(X) = \int_0^{\infty} (x-\lambda)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda^2}$

ワイブル分布

確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} (bx^{b-1}/a^b)\exp(-(x/a)^b) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, \qquad \lambda > 0$$

で定義される分布

ワイブルの性質

- $E(X) = \int_0^\infty xf(x)\,dx = a\Gamma(1 + (1/b))$
- $V(X) = \int_0^\infty (x - a\Gamma(1 + (1/b)))^2 f(x)\,dx = a^2\{(\Gamma(2 + (1/b)) - (\Gamma(1 + (1/b)))^2\}$

問題 9　X は $Bi(4, 1/2)$ に従うとする．

(i)　X の確率分布表を求めよ．

(ii)　X の期待値と分散を定義に従い求め，期待値と分散の公式で求めたものと一致することを確認せよ．

問題 10　X が $N(100, 15^2)$ に従うとき，つぎの確率を求めよ．

(i)　$P(100 \le X \le 127)$

(ii)　$P(X \le 118)$

(iii)　$P(X > 76)$

(iv)　$P(85 \le X \le 112)$