10　中心極限定理

$X_1, X_2, \ldots, X_n\,(n \geq 2)$ を独立同一に $(0, 1)$ 上の一様分布に従っているとする．$S_2 = X_1 + X_2$ の確率密度関数は

$$f_{S_2}(x) = \begin{cases} x & (0 < x \leq 1) \\ 2 - x & (1 \leq x < 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．また，$S_3 = X_1 + X_2 + X_3$ の確率密度関数は

$$f_{S_2}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & (0 < x \leq 1) \\ -x^2 + 3x - 3/2 & (1 \leq x \leq 2) \\ \dfrac{(x-3)^2}{2} & (2 \leq x < 3) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

一様分布の和の分布

```
> num.rep<-100
> num.sample<-2
> s<-rep(0,num.rep)
> for (i in 1:num.sample){
>   s<-s+runif(num.rep,0,1)
> }
> plot(density(s),xlim=c(0,num.sample),ylim=c(0,1),type="l")
```

$\boxed{\text{演習 17}}$　$n\,(n \geq 3)$ の独立な一様分布の和の分布（乱数によって生成したもの）と適当な正規分布の確率密度関数のグラフ（確率密度関数を plot したもの）を作図せよ．さらに，$n\,(n \geq 12)$ と

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

としたとき，

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}\bar{X}_1)}{\sqrt{\mathbb{VAR}(X_1)}}$$

の確率密度関数のグラフを乱数を用いて作図し，さらに，標準正規分布の確率密度関数のグラフを書け．

つぎに三角分布

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{2} - x & (0 < x \leq \sqrt{2}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

に従う擬似確率変数を作ろう．そのために，X の分布関数を求める：

$$F_X(x) = \begin{cases} \sqrt{2}x - \dfrac{x^2}{2} & (0 < x \leq \sqrt{2}) \\ 0 & x < 0 \\ 1 & (x > \sqrt{2}) \end{cases}$$

$(0, 1)$ 上の一様分布に従う確率変数を U とすれば、$F_X^{-1}(U)$ は三角分布に従う．ただし，$F_X^{-1}(x)$ の定義域は $(0, 1)$ で

$$F_X^{-1}(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{2 - 2x}$$

である．これは，$0 \leq x \leq \sqrt{2}$ に対して，

$$P(F_X^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F_X(x)) = F_X(x)$$

からわかる．

三角分布に従う擬似乱数の生成

```
> num.rep<-100
> tra<-sqrt(2)-sqrt(2-2*runif(num.rep,0,1))
> plot(density(tra),xlim=c(0,2),ylim=c(0,2),type="l")
```

$\boxed{\text{演習 18}}$ 三角分布に独立同一に従う確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geq 2)$ とする．

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

としたとき，

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}\bar{X}_1)}{\sqrt{\mathbb{VAR}(X_1)}}$$

の確率密度関数のグラフを乱数を用いて作図し，さらに，標準正規分布の確率密度関数のグラフを書け．