

確率統計と情報処理・演習（2015 年度後期）

確率分布

2015 年 10 月 23 日

日本女子大学理学部数物科学科 今野 良彦

August 13, 2015

今日の講義の目的と概要

- 確率の定義と確率分布
- 確率変数とその特性量
 - － 累積分布関数
 - － 確率関数と確率密度関数
- いくつかの重要な確率分布
 - － 離散型分布
 - * 二項分布・ポアソン分布
 - － 連続型分布
 - * 正規分布・指数分布・一様分布

確率事象

- 試行：硬貨投げのようにその結果が不確実な現象の観察や実験
- 標本点：試行によって起こりえる結果. これを ω と書く¹.
- 標本空間：標本点全体からなる集合. これを Ω と書く².
- 事象：いくつかの標本点からなる集合. 標本空間 Ω も事象の例. $\omega \in \Omega$ なので, Ω は必ず起こる事象であり, 全事象ともいう.
- 事象 A の補事象 A^c : A に含まれない標本点すべての集合. 全事象 Ω の補事象を空事象とよび, $\emptyset$ と書く.

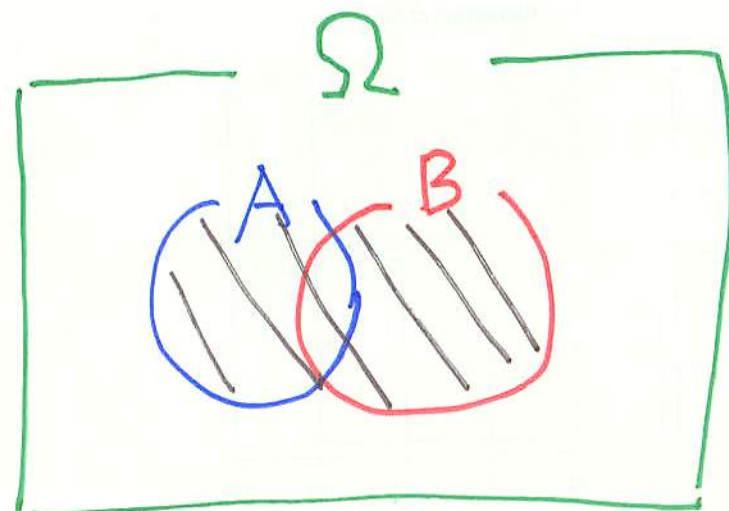
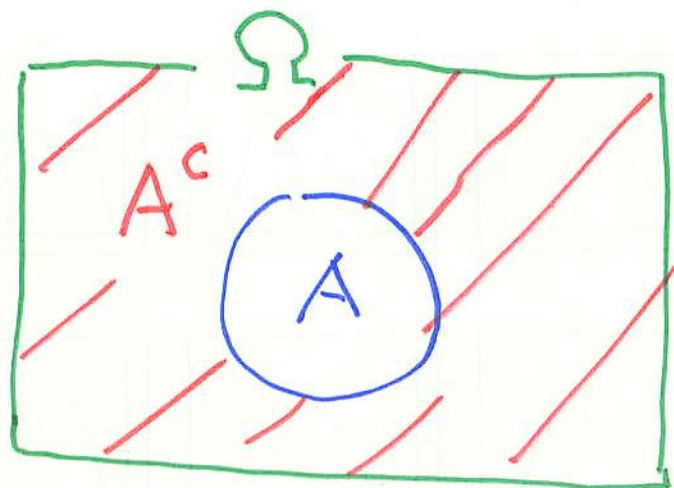
¹ 「オメガ」と読む

² 「オメガ」と読む. ω の大文字.

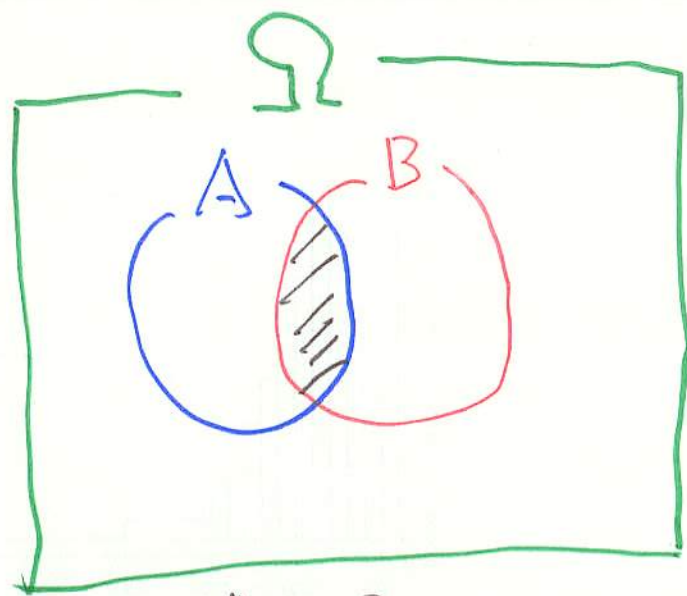
- 事象 A と B の共通（積）事象 $A \cap B$: A と B の 両方に共通 に含まれる標本点の集合.

特に, $A \cap B = \emptyset$ のとき, 事象 A と B は互いに排反であるという.

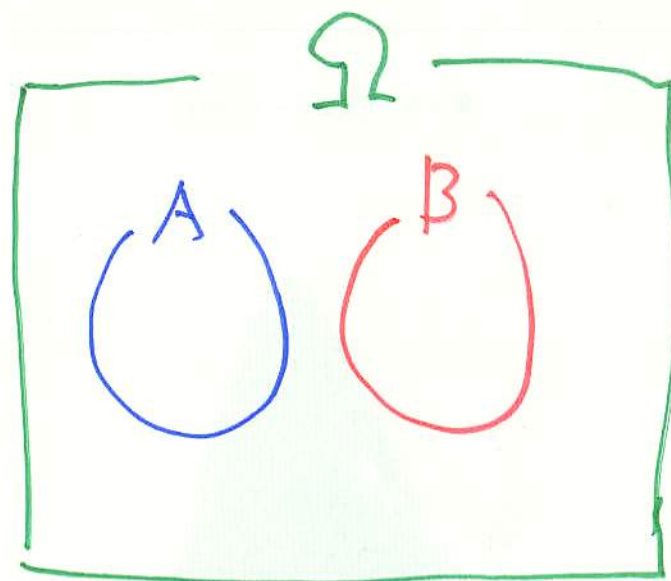
- 事象 A と B の和事象 $A \cup B$: A と B のうち 少なくともとも一方 に含まれる標本点の集合.



$A \cup B$



$A \cap B$



A と B は互いに排反

確率の定義

事象 A の関数 $\mathbb{P}(\cdot)$ で、つぎの条件をみたすものを考える³：

P1 すべての事象 A に対して， $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

P2 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

P3 事象 A と B が互いに排反のとき， $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ が成立⁴.

このとき，関数 $\mathbb{P}(\cdot)$ を標本空間 Ω 上の**確率分布**といい， $\mathbb{P}(A)$ を事象 A の**確率**とよぶ⁵. $(\Omega, \mathbb{P})$ のことを**確率モデル**という.

³ $\mathbb{P}$ を教科書では Pr と書いている.

⁴P3 のことを有限加法性というが，本来は完全加法性で確率は定義される：すなわち，事象列 $A_1, A_2, \dots$ が互いに排反のとき， $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

⁵事象 A の起こる確率ということ.

確率の性質

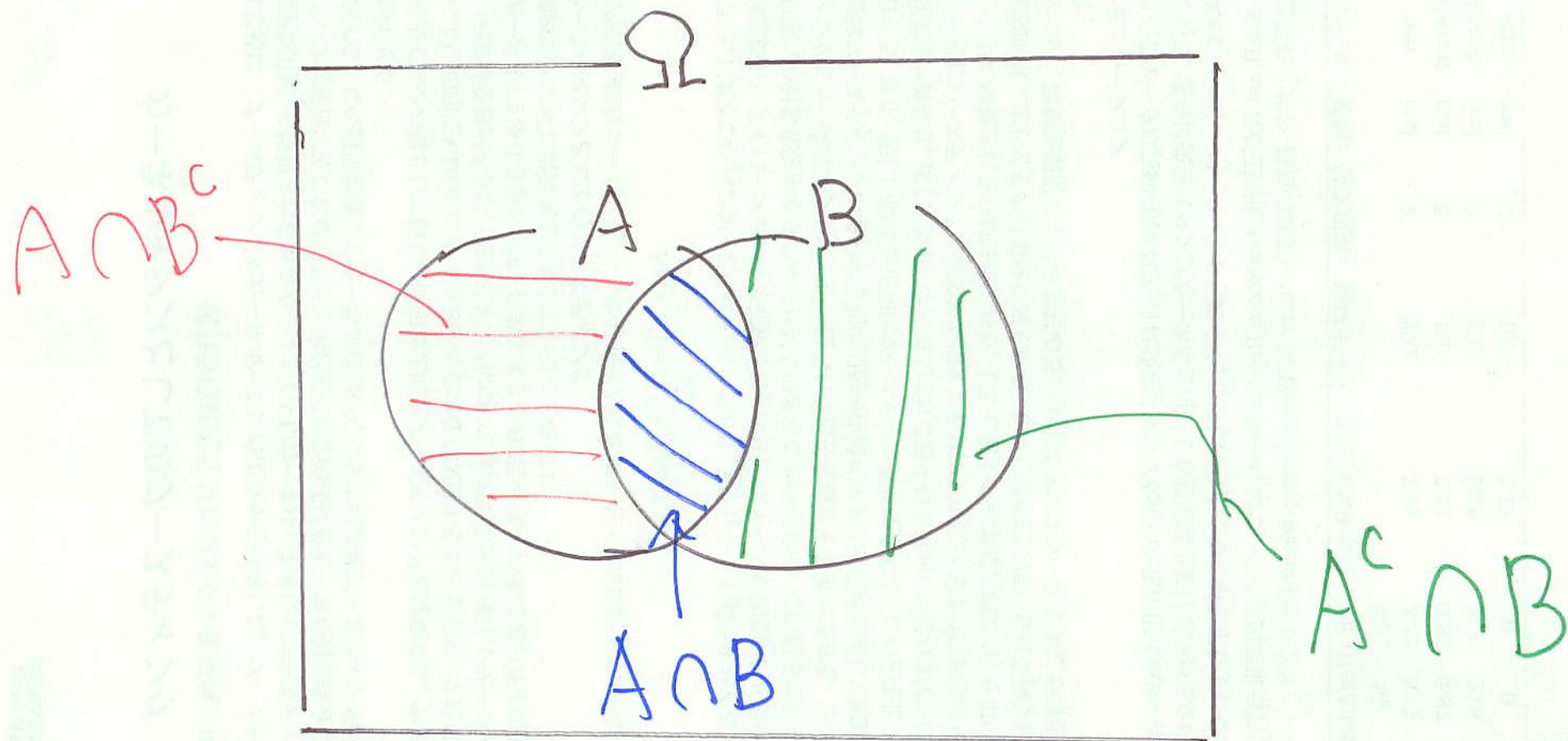
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

なぜならば，補事象の定義から $A \cap A^c = \emptyset$ となるので， A と A^c は互いに排反．さらに， $A \cup A^c = \Omega$ より

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(\Omega) && \text{(確率の性質 P2 より)} \\ &= \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) && \text{(確率の性質 P3 より)} \end{aligned}$$

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$A \cap B^c$, $A \cap B$, $A^c \cap B$ は互いに排反で， $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = A \cup B$ に注意して，P3 を用いればよい．



確率変数の定義

例 「2 人の子供がいる家庭について、子供の男女の性別を調べる」という試行を考える．女兒を g ，男児を b で表す．たとえば，生まれた順が，女，男ならば， gb と書く．標本空間は

$$\Omega = \{gg, gb, bg, bb\}.$$

男女の出生比率は $\frac{1}{2}$ とすると，

$$\mathbb{P}(gg) = \mathbb{P}(gb) = \mathbb{P}(bg) = \mathbb{P}(bb) = \frac{1}{4}$$

となる．

いま、女子の人数 X だけに注目する．標本点 ω が与えられれば、 X の値は確定するから、その意味で X は ω の関数 $X = X(\omega)$ である．

実際、

$$X(\{gg\}) = 2, X(\{gb\}) = X(\{bg\}) = 1, X(\{bb\}) = 0.$$

すると

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{gb\} \cup \{bg\}) = \mathbb{P}(\{gb\}) + \mathbb{P}(\{bg\}) = \frac{1}{2}$$

確率変数の定義

一般に、ある試行の確率モデル $(\Omega, \mathbb{P})$ が与えられたとき、標本空間 Ω 上で定義された実数値関数 $X = X(\omega)$ を**確率変数**とよぶ．

確率変数の累積分布関数の定義

一般に、ある試行の確率モデル $(\Omega, \mathbb{P})$ が与えられたとき、確率変数 X に対して、

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

を確率変数 X の**累積分布関数**という。

確率変数の累積分布関数の性質

- ★ X が区間 $(a, b]$ に入る確率は $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ となる。
 - ★ すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $0 \leq F_X(x) \leq 1$
 - ★ 単調非減少性： $x_1 < x_2$ のとき、 $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ 。
 - ★ 有界性： $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ 。
 - ★ 右連続性： $\lim_{x \downarrow a} F_X(x) = F_X(a)$
- ただし、 $x \downarrow a$ は x は a に右から近づくことを表す。

離散型分布：確率関数と確率分布表

—— 離散型確率変数と確率関数 ——

★ 確率変数 X が離散型であるとは、 X のとりえる値が有限個または可算無限個の場合をいう.

★ 標本空間を形式的に $\Omega = \{a_0, a_1, \dots, \}$ と書いたとき、 X の確率分布は

$$f_X(a_k) = \mathbb{P}(X = a_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

によって完全に定まる. このような分布を**離散型分布**という.

★ $f_X(a)$ を X の**確率関数**という.

確率関数の性質

確率関数 f_X は次の性質をもつ：

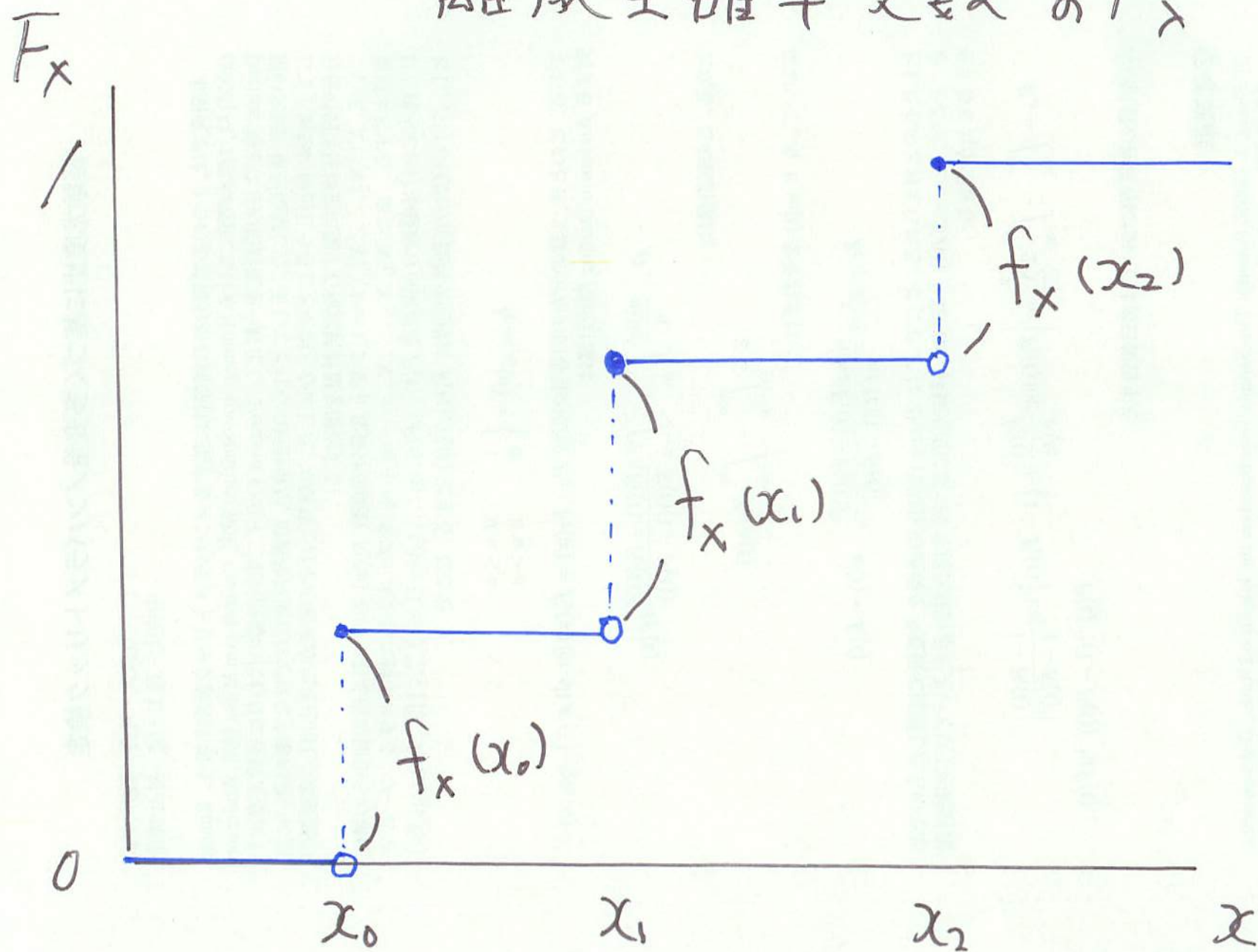
(i) $f_X(a_k) \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots,$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} f_X(a_k) = 1$

X のとりえる値が有限個のとき，確率関数を表にまとめたものを確率分布表という．

X の値	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_k	計
f_X の値	$f_X(a_0)$	$f_X(a_1)$	$f_X(a_2)$	$\cdots$	$f_X(a_k)$	1

離散型確率変数の F_x



—— 連続型確率変数とは ——

確率変数 X が連続型であるとは，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\mathbb{P}(X = x) = 0$$

が成立するときをいう．

—— 連続型確率変数 X の確率密度関数 ——

連続型確率変数 X の累積分布関数 F_X が微分可能のとき， X の確率密度関数を

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

で定める．

したがって,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

となる. 一般には,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a) && \text{(確率と累積分布関数の関係から)} \\ &= \int_{-\infty}^b f_X(x) dx - \int_{-\infty}^a f_X(x) dx \\ &= \int_a^b f_X(x) dx && \text{(積分の性質から)}\end{aligned}$$

確率密度関数の性質

確率密度関数 f_X は次の性質をもつ：

- (i) $f_X(x) \geq 0 \ (\forall x),$
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \, dx = 1$
- (iii) $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) \, dx$

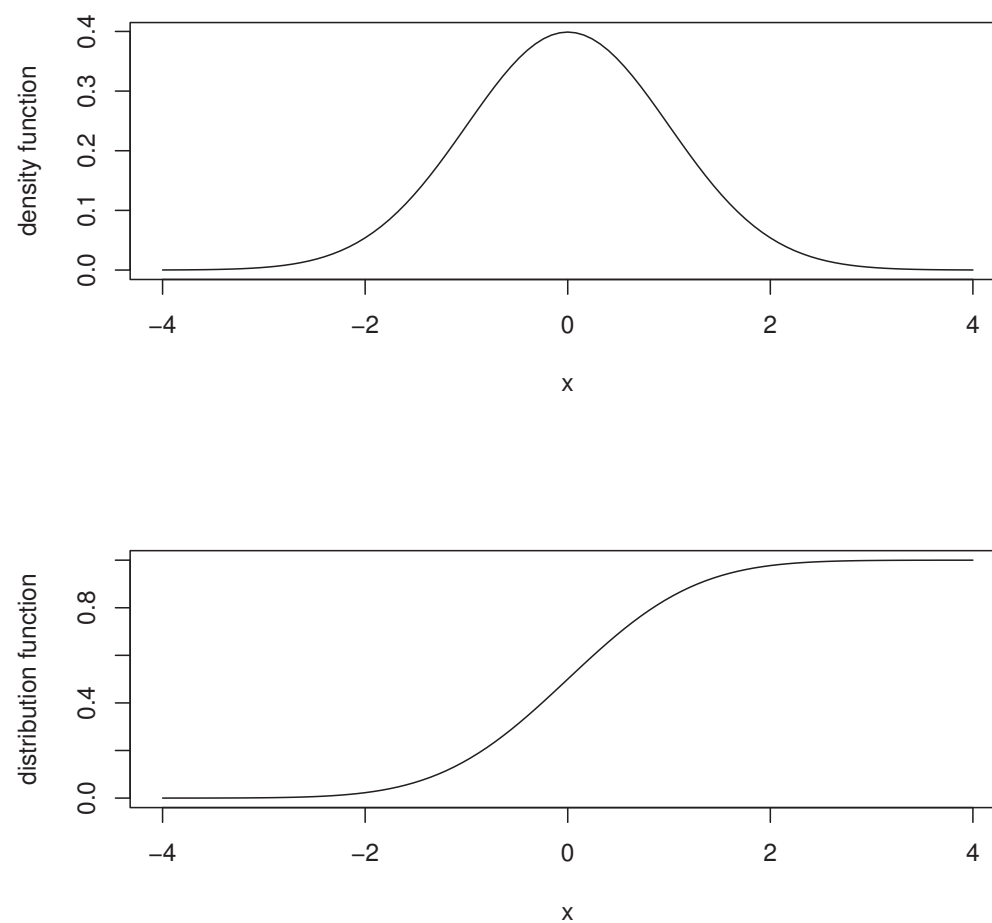


Figure 1: 連続型確率変数の確率密度関数(上)と分布関数（下）

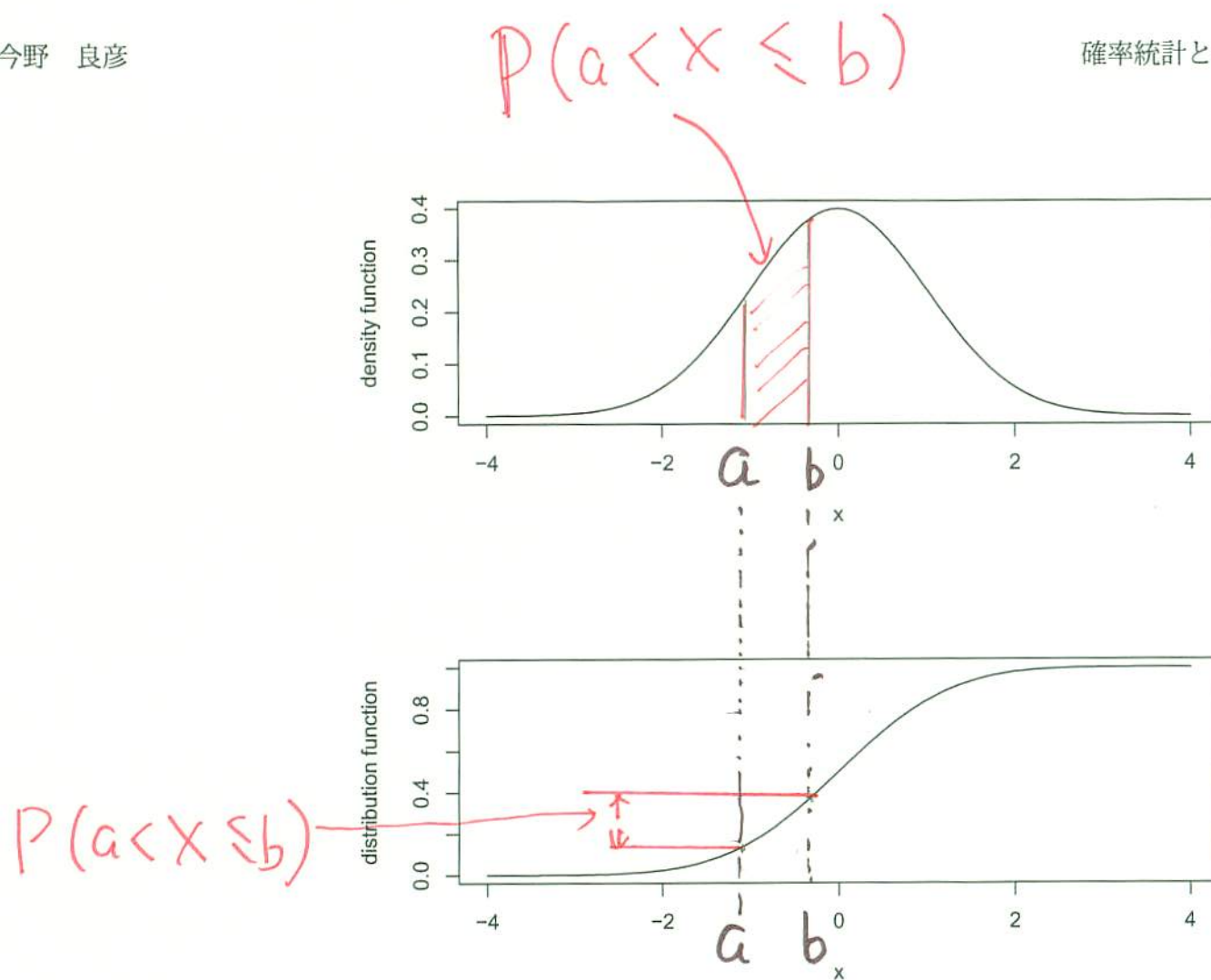


Figure 1: 連続型確率変数の確率密度関数(上)と分布関数(下)

離散型確率変数の期待値

離散型確率変数 X の確率関数を $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ としたとき, X の平均値と分散を

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x f_X(x) = \sum_x x \mathbb{P}(X = x) =: \mu,$$

$$\text{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 f_X(x)$$

★ 平均値は X の分布の位置をあらわす.

★ 分散は X のばらつきをあらわす. 分散が小さいほど X はその平均値 μ の近くを変動する.

連続型確率変数の期待値

連続型確率変数 X の確率密度関数を $f_X(x)$ としたとき, X の平均値と分散を

$$\mathbb{E}[X] = \int x f_X(x) dx =: \mu,$$

$$\text{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \int (x - \mu)^2 f_X(x) dx$$

★ 平均値は X の分布の位置をあらわす.

★ 分散は X のばらつきをあらわす. 分散が小さいほど X はその平均値 μ の近くを変動する.

a, b を定数とする.

—— 平均値と分散の性質 ——

$$(i) \mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$$

$$(ii) \text{VAR}[aX + b] = a^2 \text{VAR}[X]$$

$$(iii) \text{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2$$

★ (i) の確認. $\mathbb{E}[aX + b] = \int (ax + b)f_X(x) dx = a \int x f_X(x) dx + b \int f_X(x) dx = a\mathbb{E}[X] + b =: a\mu + b$. この証明は X は連続型確率変数のときの場合であるが、離散型の場合には、積分を和の記号に直せばよい.

★ (ii) の確認. $\text{VAR}[aX + b] = \int \{(ax + b) - (a\mu + b)\}^2 f_X(x) dx = \int a^2(x - \mu)^2 f_X(x) dx = a^2 \text{VAR}[X]$

★ (iii) の確認. $\mathbb{E}[X] = \mu$ とかく.

$$\begin{aligned}\mathrm{VAR}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mu\mathbb{E}[X] + \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \times \mu + \mu^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2 = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2\end{aligned}$$

ここまでのまとめ

- 試行, 標本点, 標本空間, 事象
- 確率と確率分布の定義. 確率の性質
- 確率変数の定義
 - 離散型確率変数 — 確率関数
 - 連続型確率変数 — 確率密度関数
- 累積分布関数
- 確率変数とその特性量

以上の事項についての定義や性質について説明しました.

問題 1

ふたつのサイコロを投げる場合には、標本空間は

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \dots, 6\}$$

となる。このとき、

$$\mathbb{P}\{(i, j)\} = \frac{1}{36}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6$$

となる。さらに、 $\mathbb{P}(i + j = 3)$ の確率を求めるには、

$$\{i + j = 3\} = \{(1, 2)\} \cup \{(2, 1)\}$$

に注意して,

$$\mathbb{P}(i + j = 3) = \mathbb{P}(\{(1, 2)\} \cup \{(2, 1)\}) = \mathbb{P}(\{1, 2\}) + \mathbb{P}(\{2, 1\}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$

となる. 確率変数 X を

$$X((i, j)) = i + j$$

で定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

- $\mathbb{P}(X = x) > 0$ となる x の値をすべてもとめよ.
- $\mathbb{P}(X = 2)$ の確率を求めよ.
- $\mathbb{P}(X = 12)$ の確率を求めよ.
- $\mathbb{P}(X = 4)$ の確率を求めよ.

- X の確率分布表を完成させよ.
- 締め切りは 2015 年 10 月 30 日（金）13 時
- このレポートは A4 のレポート用紙にかき，数研前のレポート入れに提出すること．表紙に講義名，学籍番号，名前，宿題の締め切り日を書いてください．

2 項分布

2 項分布

確率変数 X が, 母数 n , p (n は自然数, $0 \leq p \leq 1$) の **2 項分布**に従うとは, その確率関数

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

ただし,

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}, \quad 0! = 1$$

2項分布の性質

- $\sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = 1$
- $\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = np$
- $\text{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X - np)^2] = \sum_{x=0}^n (x - np)^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = np(1-p)$

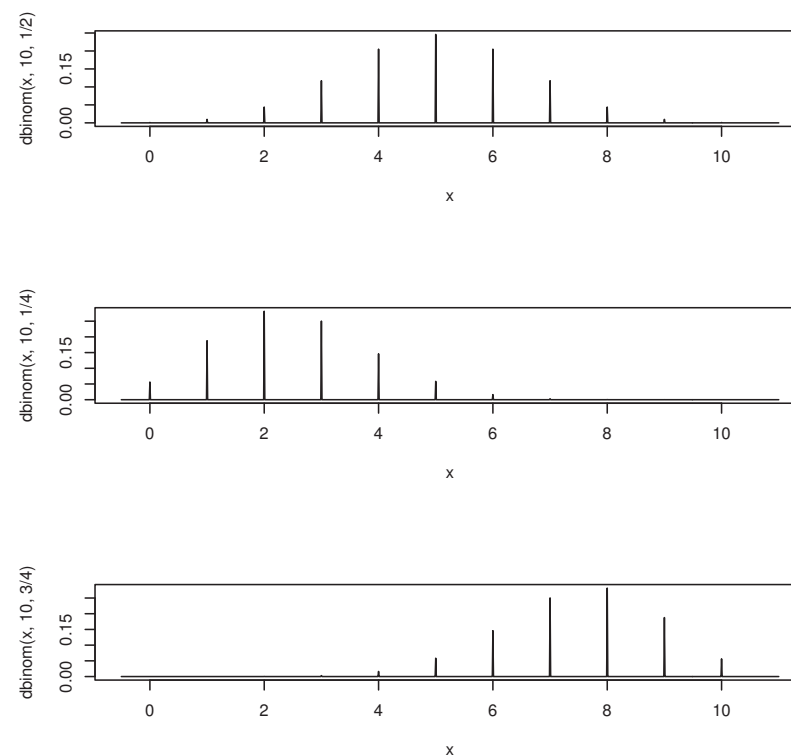


Figure 2: 2 項分布の確率関数のグラフ ($n = 10, p = 1/2, 1/4, 3/4$)

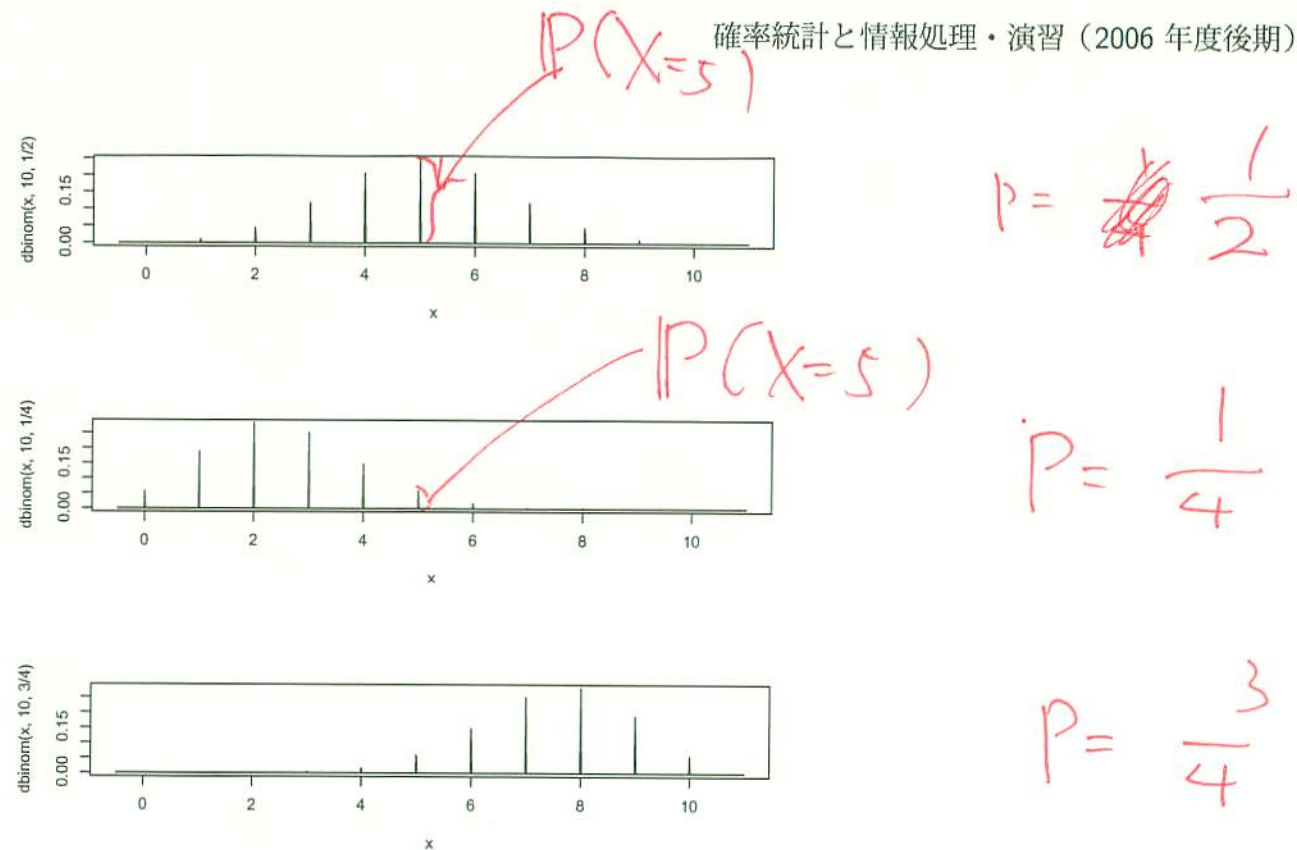


Figure 2: 2 項分布の確率関数のグラフ ($n = 10, p = 1/4, 1/2, 3/4$)

2 項分布の確率関数の作図

```
> x<-seq(-0.5,11,by=0.01)
> op<-par(mfrow=c(3,1))
> plot(x,dbinom(x,10,1/2),type="l") # "l"(エル)
50 件以上の警告がありました（警告を見るには warnings() を使って下さい）
> plot(x,dbinom(x,10,1/4),type="l")
50 件以上の警告がありました（警告を見るには warnings() を使って下さい）
> plot(x,dbinom(x,10,3/4),type="l")
50 件以上の警告がありました（警告を見るには warnings() を使って下さい）
>
```


2 項分布の確率関数の作図

```
> heights<-dbinom(0:10,size=10,prob=1/2)
> plot(0:10,heights,type="h",
+ main="Spike plot of X",xlab="k",ylab="p.d.f.")
> points(0:10,heights,pch=16,cex=1)
```

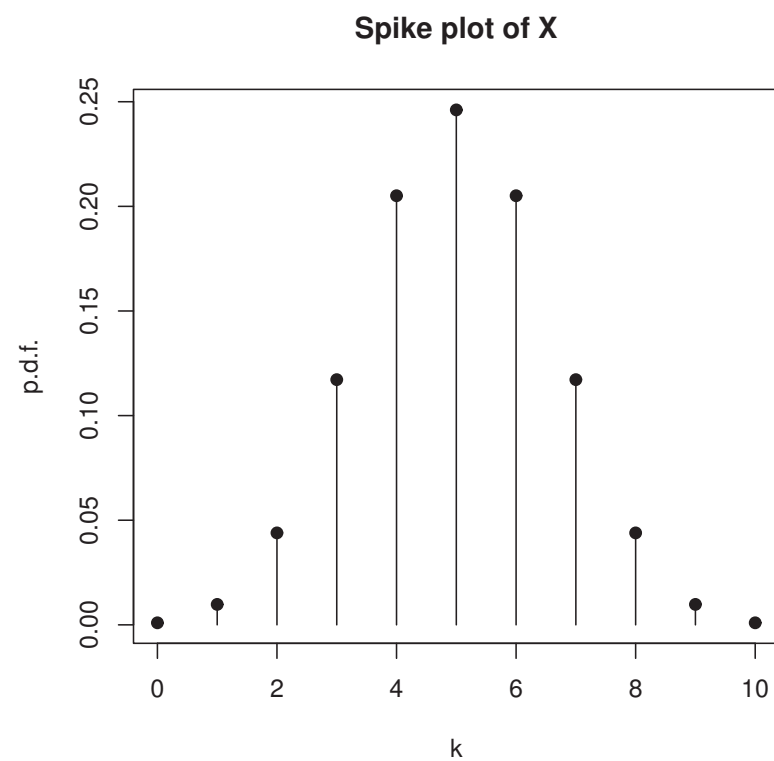


Figure 3: 2 項分布の確率関数のグラフ ($n = 10, p = 1/2$)

ポアソン分布

—— ポアソン分布 ——

確率変数 X が，母数 λ ($\lambda > 0$) の**ポアソン分布**に従うとは，その確率関数

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad x = 0, 1, \dots$$

ポアソン分布の性質

- $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = 1$
- $\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \lambda$
- $\text{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X - \lambda)^2] = \sum_{x=0}^{\infty} (x - \lambda)^2 \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \lambda$

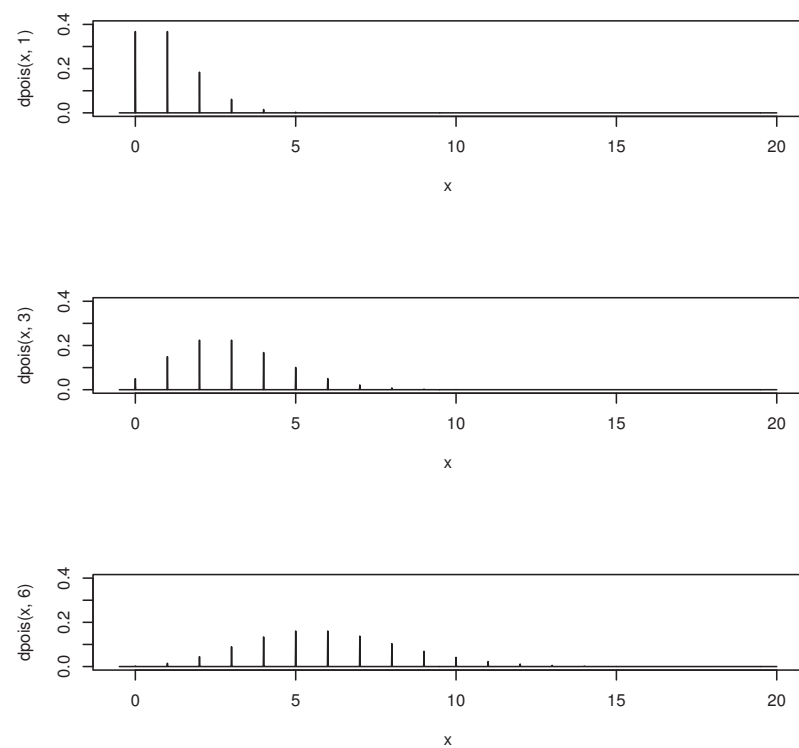


Figure 4: ポアソン分布の確率関数のグラフ ($\lambda = 1, 3, 6$)

ポアソン分布の確率関数の作図

```
> op<-par(mfrow=c(3,1))
> x<-seq(-0.5,20,by=0.01)
> plot(x,dpois(x,1),type="l")
50 件以上の警告がありました (警告を見るには warnings() を使って下さい)
> plot(x,dpois(x,3),type="l")
50 件以上の警告がありました (警告を見るには warnings() を使って下さい)
> plot(x,dpois(x,6),type="l")
50 件以上の警告がありました (警告を見るには warnings() を使って下さい)
> op<-par(mfrow=c(3,1))
> plot(x,dpois(x,1),type="l",ylim=c(0,0.4))
50 件以上の警告がありました (警告を見るには warnings() を使って下さい)
> plot(x,dpois(x,3),type="l",ylim=c(0,0.4))
50 件以上の警告がありました (警告を見るには warnings() を使って下さい)
> plot(x,dpois(x,6),type="l",ylim=c(0,0.4))
50 件以上の警告がありました (警告を見るには warnings() を使って下さい)
>
```

ポアソン分布の確率関数の作図

```
> heights<-dpois(0:10,lambda=1)
> plot(0:10,heights,type="h",
+ main="Spike plot of X",xlab="k",ylab="p.d.f.")
> points(0:10,heights,pch=16,cex=1)
>
```

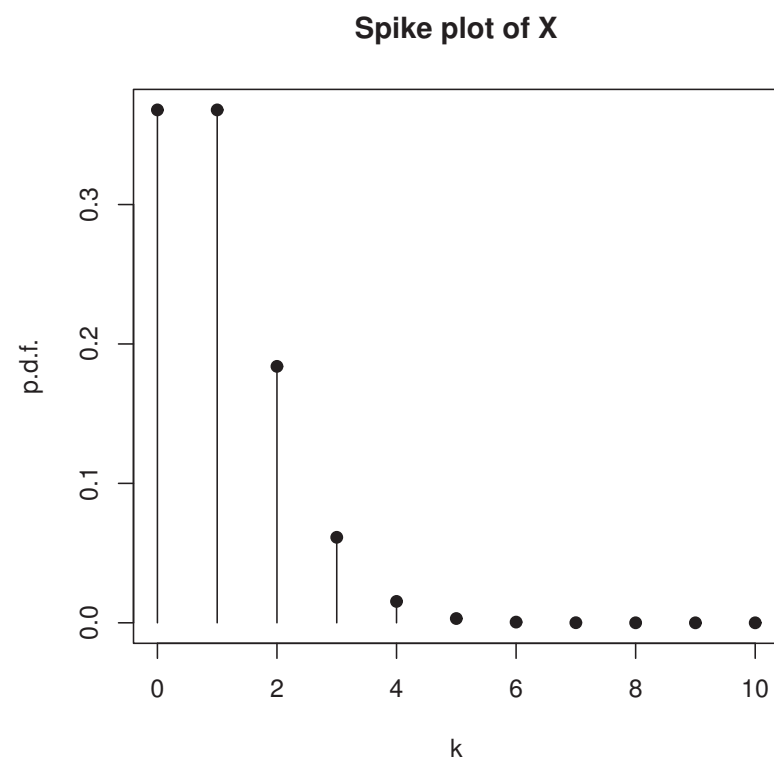


Figure 5: ポアソン分布の確率関数のグラフ ($\lambda = 1, 3, 6$)

正規分布

もっとも基本的な分布である．ガウス分布とも白色雑音とも呼ばれる．

標準正規分布

確率変数 Z が、平均 0、分散 1^2 の**標準正規分布**（ $N(0, 1^2)$ と記す）に従うとは、その確率密度関数

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right], \quad -\infty < z < \infty.$$

すなわち、

$$\mathbb{P}(a < Z \leq b) = \int_a^b f_Z(z) dz \quad (\text{任意の } a, b (a < b) \text{ に対して})$$

なぜ、平均 0、分散 1^2 というかはあとで説明．

曲線の作図

```
>  
> curve(sin,-2*pi,2*pi)          # curve で曲線を描く.  
>
```

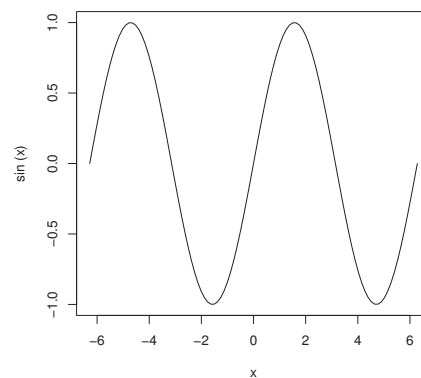


Figure 6: 正弦関数のグラフ

標準正規分布の確率密度関数と累積分布関数の作図

```
>
> op<-par(mfrow=c(2,1))
> curve(dnorm(x,0,1),-4,4)
# 画面にグラフを同時に描く.
# 標準正規分布の確率密度関
数の作図
> curve(pnorm(x,0,1),-4,4)
# 標準正規分布の累積分布関
数の作図
>
> op<-par(mfrow=c(1,1))
# 画面を元にもどす.
>
```

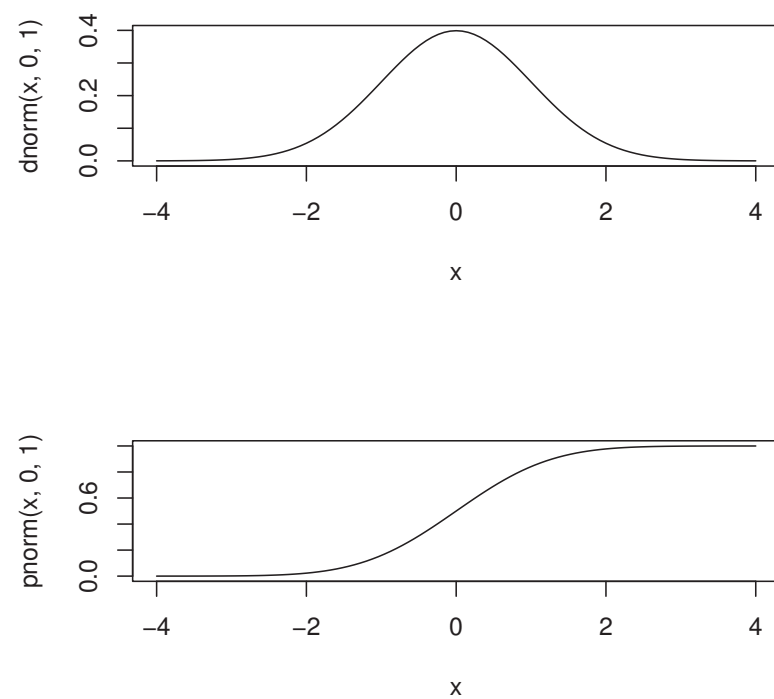


Figure 7: 標準正規分布の確率密度関数と累積分布関数のグラフ

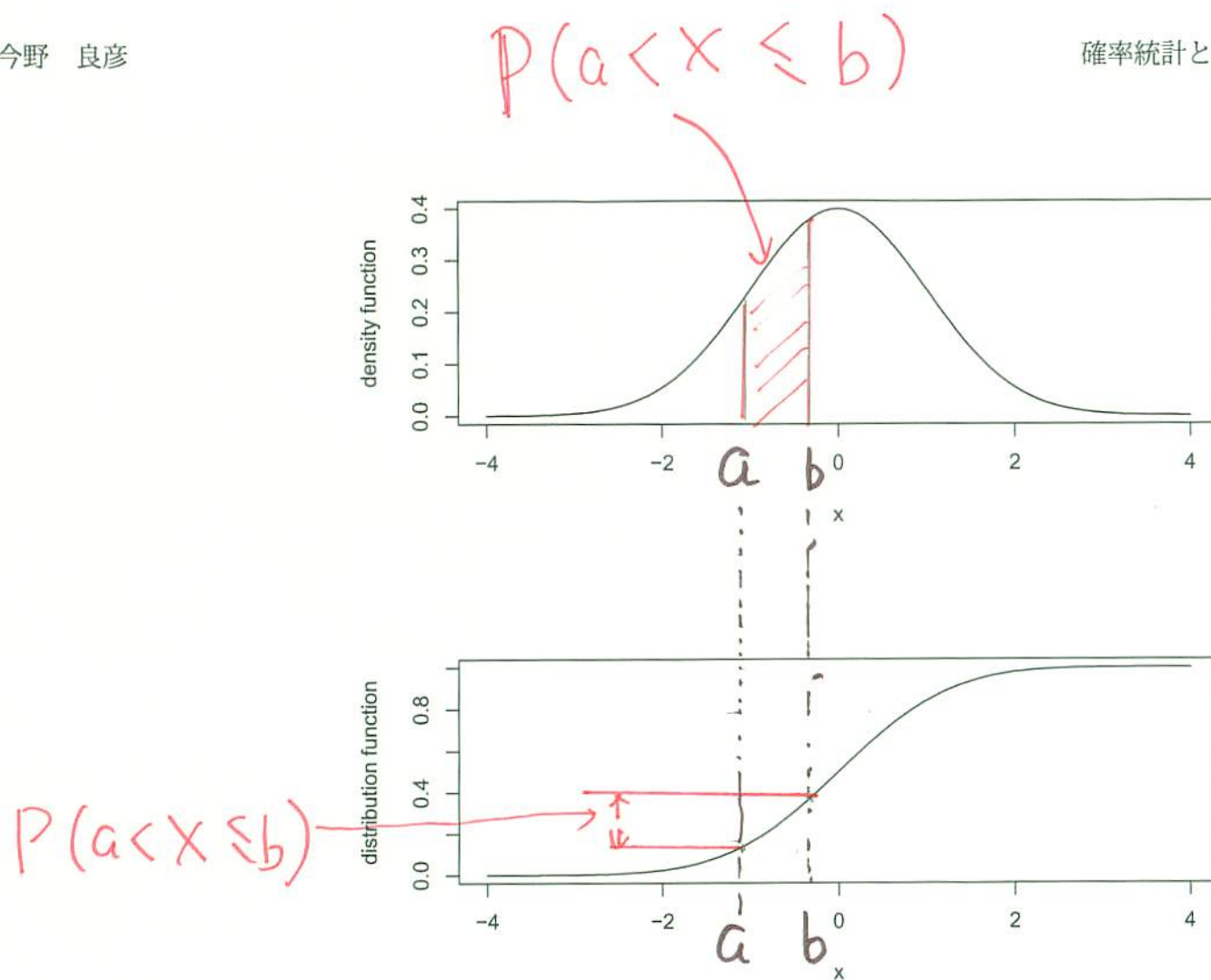


Figure 1: 連続型確率変数の確率密度関数(上)と分布関数(下)

$X = \sigma Z + \mu$ とおく．ただし， $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ ．このとき， X の確率密度関数は

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad -\infty < x < \infty$$

なぜならば，任意の x に対して，

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\sigma Z + \mu \leq x) = \mathbb{P}(Z \leq (x - \mu)/\sigma) \\ &= \int_{-\infty}^{(x - \mu)/\sigma} f_Z(z) dz \end{aligned}$$

よって、微積分の基本定理 $\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x g(z) dz = g(x)$ と合成関数の微分から

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

したがって、任意の a, b ($a < b$) に対して

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] dx$$

このとき、 X は $N(\mu, \sigma^2)$ (平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布) に従うという.

—— 正規分布の性質 ——

確率変数 X が $N(\mu, \sigma^2)$ （平均 μ ，分散 σ^2 の正規分布）に従うとき，

- 任意の a, b ($a < b$) に対し, $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 1$
- $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu$
- $\text{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \sigma^2$

—— 正規分布の性質 ——

確率変数 X が $N(\mu, \sigma^2)$ （平均 μ ，分散 σ^2 の正規分布）に従うとき，

- $a, b (a \neq 0)$ を定数としたとき， $aX + b$ は正規分布 $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ に従う．

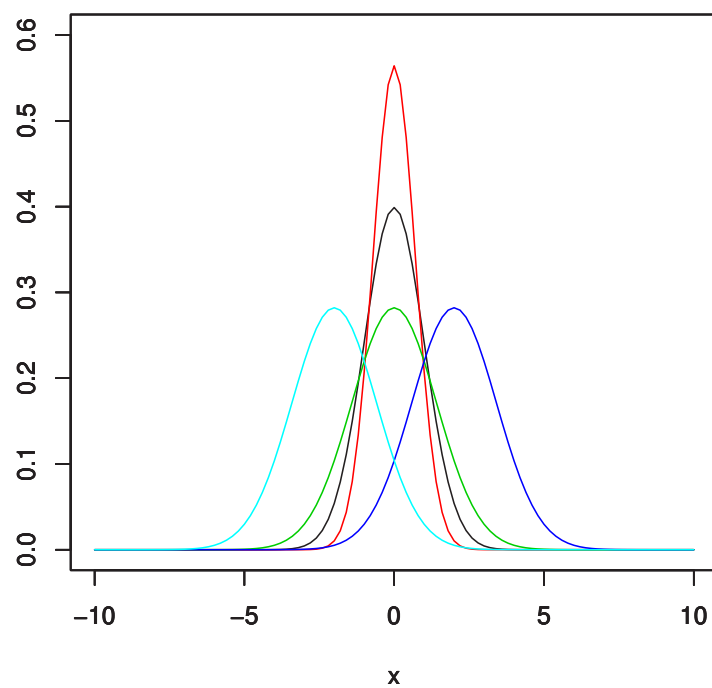


Figure 8: $N(0, 1)$, $N(0, 2)$, $N(0, 1/2)$, $N(2, 2)$, $N(-2, 2)$ の確率密度関数のグラフ

正規分布の確率密度関数のグラフの作図

```
>  
> curve(dnorm(x,0,1),-10,10,ylim=c(0,0.6),ylab="",col=1)  
> # N (0, 1 )  
> par(new=T)    # グラフの2重書き  
> curve(dnorm(x,0,1/sqrt(2)), -10,10,ylim=c(0,0.6),ylab="",col=2)  
> # N (0, 1/2 )  
> par(new=T)  
> curve(dnorm(x,0,sqrt(2)), -10,10,ylim=c(0,0.6),ylab="",col=3)  
> # N (0, 2 )  
> par(new=T)  
> curve(dnorm(x,-2,sqrt(2)), -10,10,ylim=c(0,0.6),ylab="",col=4)  
> # N (-2, 2 )  
> par(new=T)  
> curve(dnorm(x,2,sqrt(2)), -10,10,ylim=c(0,0.6),ylab="",col=5)  
> # N (2, 2 )  
>
```

—— 一様分布 ——

確率変数 X が $[a, b]$ 上の一様分布に従うとは、その確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

すなわち,

$$\mathbb{P}(c < X \leq d) = \int_c^d f_X(x) dx \quad (\text{任意の } c, d (a < c < d < b) \text{ に対して})$$

特に,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ \frac{x-a}{b-a} & (a \leq x \leq b), \\ 1 & (b < x) \end{cases}$$

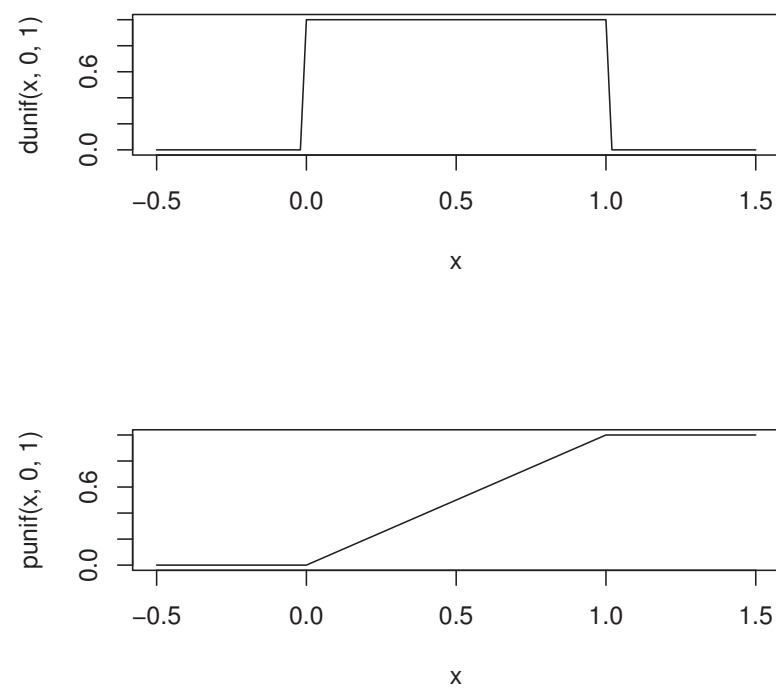


Figure 9: 一様分布の確率密度関数と累積分布関数のグラフ

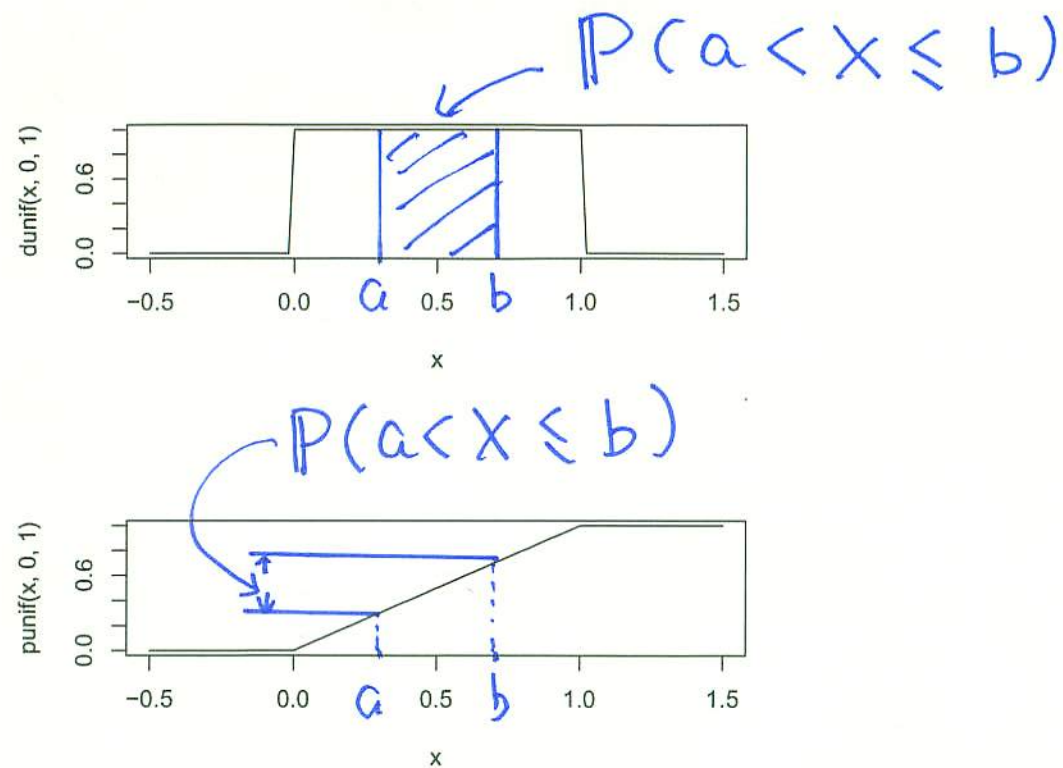


Figure 7: 一様分布の確率密度関数と累積分布関数のグラフ

一様分布の確率密度関数のグラフの作図

```
>
> op<-par(mfrow=c(2,1))          # グラフを上下に2枚の作図
  するためのコマンド
>
> curve(dunif(x,0,1),-0.5,1.5)    # 確率密度関数の作図
>
> curve(punif(x,0,1),-0.5,1.5)    # 累積分布関数の作図
>
> op<-par(mfrow=c(1,1))
>
```

指数分布

確率変数 X が母数 $\lambda (\lambda > 0)$ の**指数分布**に従うとは、その確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

すなわち,

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (\text{任意の } a, b (0 < a < b) \text{ に対して})$$

特に,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 - e^{-\lambda x} & (x > 0), \end{cases}$$

指数の性質

- $\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$

- $\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$

- $\text{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X - \frac{1}{\lambda})^2] = \int_0^{\infty} (x - 1/\lambda)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$

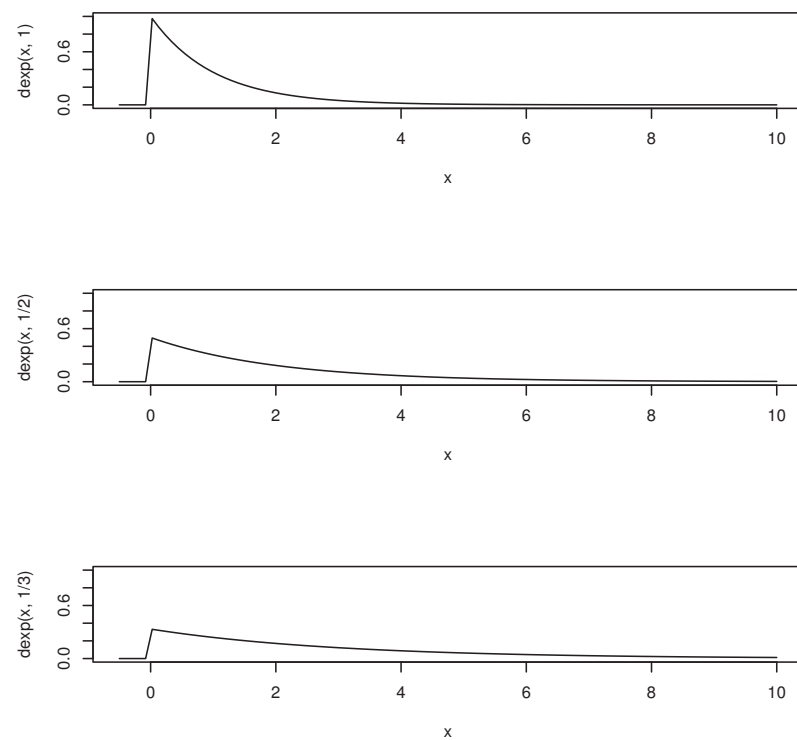
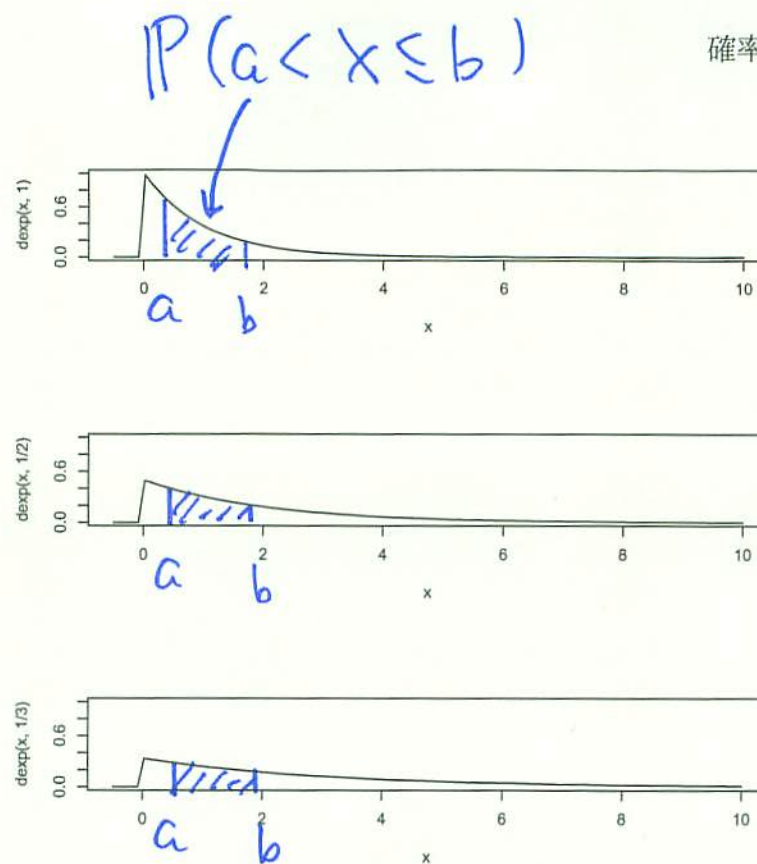


Figure 10: 指数の確率密度関数のグラフ ($\lambda = 1, 1/2, 1/3$)



$$\lambda = 1$$

$$\lambda = 2$$

$$\lambda = 3$$

Figure 8: 指数の確率密度関数のグラフ ($\lambda = 1, 2, 3$)

指数の確率密度関数のグラフの作図

```
> op<-par(mfrow=c(3,1))  
> curve(dexp(x,1),-0.5,10,ylim=c(0,1))  
> # \lambda = 1  
> curve(dexp(x,1/2),-0.5,10,ylim=c(0,1))  
> # \lambda = 2  
> curve(dexp(x,1/3),-0.5,10,ylim=c(0,1))  
> # \lambda = 3  
>
```

ここまでのまとめ

- 離散型分布
 - － 二項分布
 - * 確率関数・平均値・分散
 - － ポアソン分布
 - * 確率関数・平均値・分散
- 連続型分布
 - － 正規分布
 - * 確率密度関数・平均値・分散
 - － 指数分布
 - * 確率密度関数・平均値・分散
 - － 一様分布
 - * 確率密度関数

以上の事項についての定義や性質について説明しました.

問題 2

- 平均 $\mu = \text{誕生月}$, $\sigma = 2$ の正規分布の確率密度関数と分布関数のグラフを作成せよ. ただし, 確率密度関数のグラフの裾が x 軸に重なる範囲で作図せよ.

—— ヒント ——

```
> op<-par(mfrow=c(2,1))  
> curve(dnorm(x,??,??),??,??)  
>  
> curve(pnorm(x,??,??),??,??)  
>
```

- 累積分布関数のグラフと $y = 1/2$ と交差する点の x 座標の値を述べよ.
- 締め切りは 2015 年 10 月 30 日（金）13 時
- このファイル名を 21416***-目白花子-2015-10-31.txt と 21416***-normal.pdf (グラフのファイル) とせよ.