確率統計と情報処理・演習（2015 年度後期）

確率分布

2015 年 11 月 13 日

日本女子大学理学部数物科学科　　今野 良彦

August 13, 2015

今日の講義の目的と概要

- 標本分布
  - 標本分布とは（先週説明）
  - 正規母集団からの標本に関連した標本分布
    - χ^2 分布（カイ自乗分布）（先週説明）
    - t 分布と F 分布

t 分布

m を自然数とする．確率変数 T が自由度 m の t 分布に従うとは，T の確率密度関数が

$$f_m(x) = \frac{\Gamma((m+1)/2)}{\sqrt{m\pi}\Gamma(m/2)}\left(1+\frac{x^2}{m}\right)^{-(m+1)/2}, \qquad -\infty < x < \infty$$

で与えられるときをいう．

ただし，$\Gamma(a)\,(a>0)$ はガンマ関数で

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

とくに，

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= 1, \\
\Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi}, \\
\Gamma(a+1) &= a\,\Gamma(a), \\
\Gamma(n) &= (n-1)! \qquad (n \text{ は自然数})
\end{aligned}$$

t 分布のグラフの出力

```
> # 自由度 10 の t 分布の確率密度関数
> tdens10<-function(x){
+ dt(x,10)
+ }
>
> # 自由度 10 の t 分布の確率密度関数のグラフの出力
> curve(tdens10,-4,4)
>
> # 自由度 2 の t 分布
> tdens2<-function(x){
+ dt(x,2)
+ }
>
> curve(tdens10,-6,6)
> # 自由度 2 の t 分布の確率密度関数のグラフの出力を追加
> curve(tdens2,-6,6,col=2,add=T)
> # 標準正規分布の確率密度関数のグラフの出力の追加
> curve(dnorm,-6,6,col=3,add=T)
```

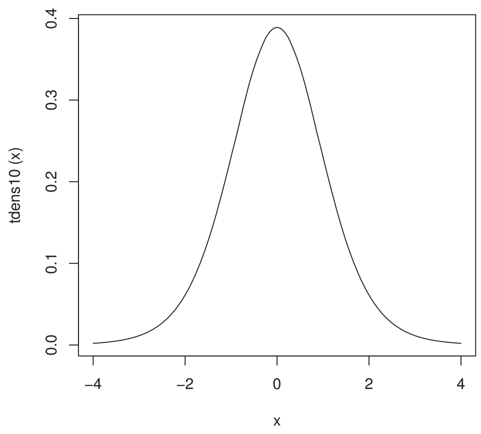



Figure 1: 自由度 10 のと t 分布の確率密度関数のグラフ

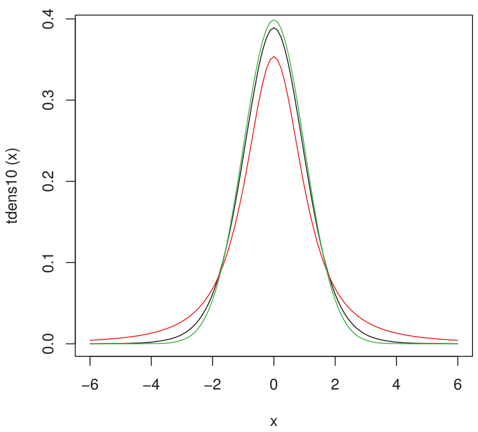


Figure 2: 自由度 10 のt 分布 (black)，自由度 2 のと t 分布 (red) と標準正規分布（green）の確率密度関数のグラフ

t 分布の確率密度関数の導出

⋆ X を標準正規分布に従う確率変数，すわわち，

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

⋆ Y を自由度 m の χ^2 に従う確率変数，すなわち

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-y/2} & (y > 0), \\ 0 & (y \leq 0). \end{cases}$$

⋆ X と Y は独立

このとき，

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Y/m}}$$

は自由度 m の t 分布に従う．

このことを示すために，任意の $-\infty < a_1 < a_2 < \infty$ と $0 < b_1 < b_2 < \infty$ に対して，

$$P(a_1 < X \le a_2,\, b_1 < Y \le b_2) = \int_{a_1}^{a_1} \int_{b_1}^{b_2} f_{X,\,Y}(x,\,y)\,dx\,dy$$

を満たす非負の関数 $f_{X,\,Y}$ を求める．これを X **と** Y **の同時確率密度関数**という．

$-\infty < x < \infty,\ y > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} P(X \le x,\, Y \le y) &= P(X \le x) P(Y \le y) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du \int_0^y \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} v^{\frac{m}{2}-1} e^{-v/2}\,dv \end{aligned}$$

となるので，微積分の基本定理を用いると

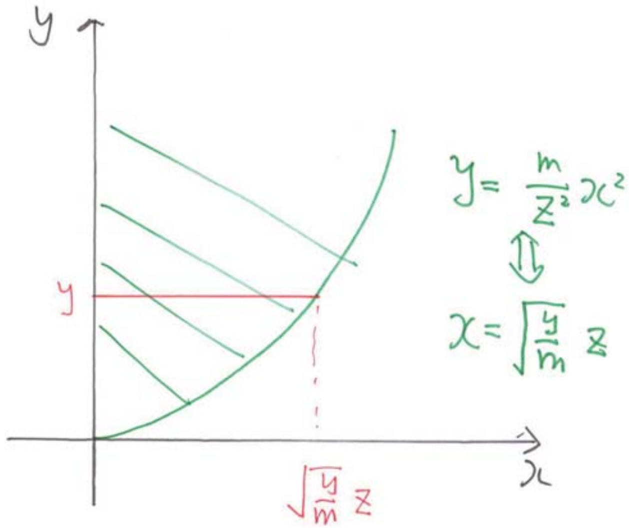
$$\begin{aligned} f_{X,\,Y}(x,\,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P(X \le x,\, Y \le y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-y/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} e^{-x^2/2} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-y/2} \end{aligned}$$

任意の z に対して，

$$\begin{aligned} P(Z \le z) &= \int\int_{(x/\sqrt{y/m}) \le z,\, y>0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} e^{-x^2/2} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-y/2}\,dx\,dy \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\sqrt{y/m}z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-(x^2+y)/2}\,dx \right\} dy \end{aligned}$$

$w = \sqrt{y/m}z$ とおき，この両辺を z で部分する．積分記号と微分記号を入れ替えを行う．

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{d}{dz} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\sqrt{y/m}z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-(x^2+y)/2}\,dx \right\} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dz} \left\{ \int_{-\infty}^{\sqrt{y/m}z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-(x^2+y)/2}\,dx \right\} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dw}{dz} \frac{d}{dw} \left\{ \int_{-\infty}^{w} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-(x^2+y)/2}\,dx \right\} dy \\ &= \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{y}{m}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-(w^2+y)/2}\,dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)} \frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{(m+1)/2}} y^{(m-1)/2} \exp\left[-\frac{(1+z^2/m)y}{2} \right] dy \end{aligned}$$



ここで

$$u = \frac{(1+z^2/m)y}{2}, \qquad du = \frac{(1+z^2/m)}{2}\,dy$$

から

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)}\frac{1}{\sqrt{m}}\int_0^\infty \frac{1}{2^{(m+1)/2}}\left(u\Big/\frac{(1+z^2/m)}{2}\right)^{(m-1)/2} \\ &\qquad \times e^{-u}\Big/\frac{(1+z^2/m)}{2}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)}\frac{1}{\sqrt{m}}(1+z^2/m)^{-(m+1)/2}\int_0^\infty u^{(m+1)/2-1}e^{-u}\,du \\ &= \frac{\Gamma((m+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)}\frac{1}{\sqrt{m}}\left(1+\frac{z^2}{m}\right)^{-(m+1)/2} \end{aligned}$$

t 分布のシミュレーション

$\boxed{\text{目的}}$ 1000 個の標準正規乱数と自由度 m の χ^2 分布乱数を生成して，自由度 m の t 分布乱数を 1000 個作成して，その分布が t 分布の確率密度関数に近いことを確認する．

χ^2 分布のグラフの出力

```
> # 標準正規乱数 1000 個の生成
> nrdata<-rnorm(1000,0,1)
> # 自由度 2 のカイ自乗分布乱数 1000 個の生成
> chisqdata2<-rchisq(1000,2)
>  カイ自乗分布乱数 1000 個の平均
> mean(chisqdata2)
[1] 2.005096
>  カイ自乗分布乱数 1000 個の標準偏差
> sd(chisqdata2)
[1] 2.028897
>  # >  カイ自乗分布乱数 1000 個のヒストグラムの作成
> hist(chisqdata2,freq="F")
>  # 自由度 2 のカイ自乗分布の確率密度関数のグラフを上書き
> chisq2<-function(x){dchisq(x,2)}
> curve(chisq2,0,15,add=T)
```

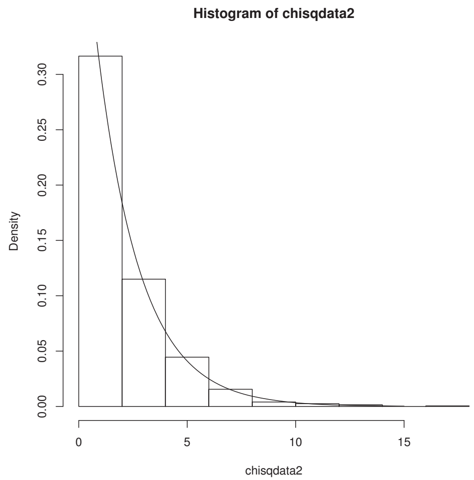


Figure 3: カイ自乗分布乱数 1000 個のヒストグラムと自由度 2 のカイ自乗分布の確率密度関数のグラフ

t 分布乱数のグラフの出力

```
> nrdata<-rnorm(5000,0,1)
> chisqdata<-rchisq(5000,6)
> # t 乱数の作成
> t6data<-nrdata/(sqrt(chisqdata/6))
>
> # 自由度 6 の t 乱数 5000 個のヒストグラム
> hist(t6data,freq=F,ylim=c(0,0.4))
> # 自由度 6 の t の確率密度関数の上書き
> t6<-function(x){dt(x,6)}
> curve(t6,-10,10,add=T,col=2)
```

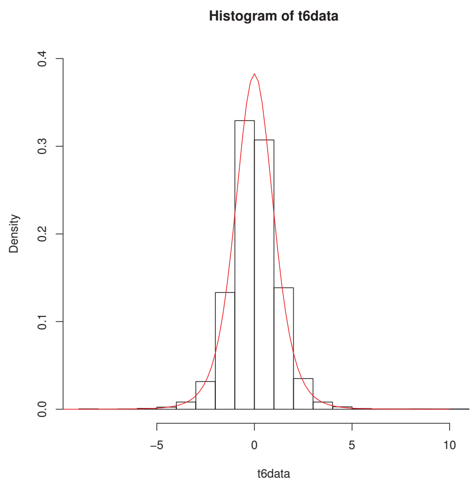



Figure 4: t 分布乱数 5000 個のヒストグラムと自由度 2 のカイ自乗分布の確率密度関数のグラフ

正規分布と t 分布の関係

t 分布が使われるのは正規分布から標本の場合である．すわわち，

$$X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n \sim N(\mu,\, \sigma^2)$$

ただし，$n \geq 2$，$-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma < \infty$ である．すなわち，

⋆ $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ は互いに独立 $-\infty < a_{i1} < a_{i2} < \infty\,(i = 1,\, 2, \ldots,\, n)$ に対して，

$$P(a_{11} < X_1 \leq a_{12},\, a_{21} < X_2 \leq a_{22},\, \ldots,\, a_{n1} < X_n \leq a_{n2}) = \Pi_{i=1}^{n} P(a_{i1} < X_i \leq a_{i2})$$

⋆
$$P(a_{i1} < X_i \leq a_{i2}) = \int_{a_{i1}}^{a_{i2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dx$$

⋆ 標本平均 $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$

⋆ 標本分散 $S_n^2 = \dfrac{1}{\underline{n-1}}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$

このとき，

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,\,1)$$

すわわち，$-\infty < a < b < \infty$ に対して，

$$P(a < Z_n \le b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz$$

今野　良彦　確率統計と情報処理・演習（2015 年度後期）

さらに，

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right)^2$$

は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う．

⋆ $0 < a < b < \infty$ に対して，

$$P(a < \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \le b) = \int_a^b \frac{1}{2^{(n-1)/2}\Gamma((n-1)/2)} y^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-y/2}\,dy$$

ただし，$\Gamma(a)\,(a>0)$ はガンマ関数で

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

今野　良彦　確率統計と情報処理・演習（2015 年度後期）

⋆ $\bar{X}_n$ と S_n^2 は独立である．すわわち，$-\infty < a < b < \infty,\ 0 < c < d < \infty$ に対して，

$$P(a < \bar{X}_n \le b,\, c < S_n^2 \le d) = P(a < \bar{X}_n \le b)P(c < S_n^2 \le d)$$

このことに注意して，

$$T = \frac{(\bar{X}_n - \mu)/\sqrt{\sigma^2/n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right)^2 /(n-1)}}$$

とおく．

今野　良彦　確率統計と情報処理・演習（2015 年度後期）

U	標準正規分布	V	自由度 m の χ^2 分布
U と V は独立			
$Z_n = \frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	標準正規分布	$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i-\bar{X}_n}{\sigma}\right)^2$	自由度 $n-1$ の χ^2 分布
Z_n と $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i-\bar{X}_n}{\sigma}\right)^2$ は独立			

このとき，

$$T = \frac{U}{\sqrt{V/m}} \Longleftrightarrow T = \frac{(\bar{X}_n - \mu)\Big/\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i-\bar{X}_n}{\sigma}\right)^2 \Big/ (n-1)}}$$

は自由度 m の t 分布に従う．

$$T = \frac{(\bar{X}_n - \mu) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right)^2 \Big/ (n-1)}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2/n}}$$

は自由度 $n-1$ の t 分布に従う．すわなち，$-\infty < a < b < \infty$ に対して，

$$P\left(a < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2/n}} \le b\right) = \int_a^b \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma((n-1)/2)} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2} dt$$

ただし，

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right)^2, \qquad \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx, \qquad a > 0$$

$T = (\bar{X}_n - \mu)/\sqrt{S_n^2/n}$ の分布をシミュレーションで確かめるアルゴリズム

(1) 平均が μ ($\mu = 0$ でなくともよい) の正規乱数を n 個発生される．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ とする．

(2) このデータの標本平均の実現値を $\bar{x}_n$，標本標準偏差の実現値を

$$u_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2}$$

(3) T の実現値

$$t = \frac{\bar{x}_n - \mu}{u_n/\sqrt{n}}$$

(4) (1) ∼ (3) を 1000 回繰り返して T の実現値を 1000 個計算する．

t の値を計算する関数

```
> tcalc<-function(x,y){
+ barx<-mean(x)
+ sdx<-sd(x)
+ tval<-(barx-y)/(sdx/sqrt(length(x)))
+ return(tval)
+ }
```

1000 個の t の値を計算し，グラフに出力

```
> samt<-rep(0,1000)              # ベクトル samt の成分は $0$
> for (i in 1:1000){              # 繰り返しのプログラム
+ samt[i]<-tcalc(rnorm(10,2,4),2)       # samt の $i$ 番 目
に t の値を入れる.
+ }
> hist(samt,nclass=20,freq=F)
> tdens9<-function(x)(dt(x,9))      # 自由度 $9$ の $t$ 分布の
密度関数
> curve(tdens9,-4,4,col=2,add=T)
```

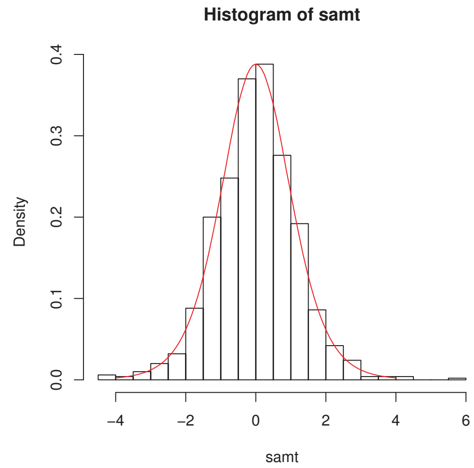



Figure 5: t 分布乱数 1000 個のヒストグラムと自由度 9 の t 分布の確率密度関数のグラフ

ここまでのまとめ

- t 分布の確率密度関数の形はわかりました？
- t 分布は独立な標準正規分布と χ^2 分布から導出されることはわかりましたか？
- 正規分布と t 分布の関係はかわりましたか？

問題 1

(1) 適当な自由度の t 分布の確率密度関数と標準正規分布の確率密度関数のグラフを書け.（21416***-t1.pdf）

(2) 1000 個の標準正規分布の乱数と自由度 m の χ^2 分布の乱数を 1000 個つくり 1000 個の t 分布乱数を作成し，そのヒストグラムと自由度 m の t の分布の確率密度関数を書き入れたものを作成せよ．ただし，自由度は誕生月プラス 4 とする.（21416***-t2.pdf）

(3) (a) 平均が μ の正規乱数を n 個発生される．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ とする.

(b) このデータの標本平均の実現値を $\bar{x}_n$，標本標準偏差の実現値を

$$u_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2}$$

(c) T の実現値

$$t = \frac{\bar{x}_n - \mu}{u_n/\sqrt{n}}$$

(d) (a) $\sim$ (c) を 1000 回繰り返して T の実現値を 1000 個計算する.

上のアルゴリズムに基づいて t 分布の乱数を作成し，1000 個のt 分布の乱数のヒストグラムと対応する自由度の t 分布の確率密度関数のグラフを書け.(21416***-t3.pdf) ただし，標本数 n は 17-(誕生月) とする.

- それぞれの問題の解説を 21416***-目白花子-2015-11-20.txt に書け.
- 締め切りは 2015 年 11 月 20 日（金）13 時

F 分布の確率密度関数

m, n は正の整数とする．自由度 (m, n) の F 分布の確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_{(m,\,n)}(x) &= \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/2-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-(m+n)/2}, & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/2-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-(m+n)/2} \mathbb{1}_{(0,\,\infty)}(x) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{(0,\,\infty)}(x) &= \begin{cases} 1 & x \in (0,\,\infty) \\ 0 & x \notin (0,\,\infty) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & (x > 0), \\ 0 & (x \le 0), \end{cases} \end{aligned}$$

自由度 (1, 10), (2, 10), (3, 10), (8, 10), (8, 20) の F の分布の確率密度関数のグラフの作図

F のグラフの出力

```
> fdens1.10<-function(x)(df(x,1,10))
> fdens2.10<-function(x)(df(x,2,10))
> fdens3.10<-function(x)(df(x,3,10))
> fdens8.10<-function(x)(df(x,8,10))
> fdens8.20<-function(x)(df(x,8,20))
> curve(fdens1.10,0.1,5,ylim=c(0,1.5))
> curve(fdens2.10,0.00000001,5,col=2,add=T)
> curve(fdens3.10,0,5,col=3,add=T)
> curve(fdens8.10,0,5,col=4,add=T)
> curve(fdens8.20,0,5,col=5,add=T)
```

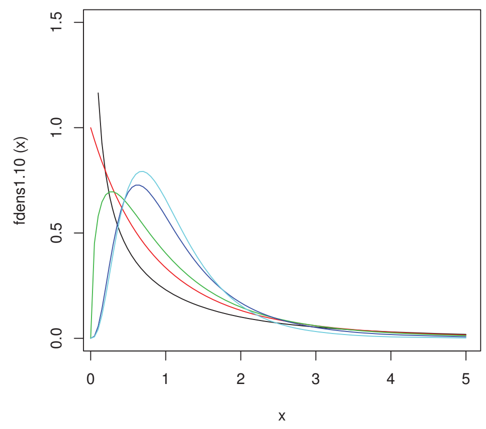



Figure 6: 自由度 $(1, 10)$(黒), $(2, 10)$(赤), $(3, 10)$(緑), $(8, 10)$(青), $(8, 20)$ の F の分布の確率密度関数のグラフ

X が自由度 m の χ^2 分布に従い，Y が自由度 n の χ^2 分布に従い，独立であれば，

$$Z = \frac{X/m}{Y/n}$$

は自由度 (m, n) の F 分布に従う．

X の確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x/2} & (x > 0), \\ 0 & (x \le 0). \end{cases} \\ &= \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x/2}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \end{aligned}$$

同様に，Y の確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2} & (y > 0), \\ 0 & (y \le 0). \end{cases} \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \end{aligned}$$

ただし，$a > 0$ に対して，

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

X と Y が独立であることから，任意の $0 < a_1 < a_2 < \infty$, $0 < b_1 < b_2 < \infty$ に対して，

$$P(a_1 < X \leq a_2,\, b_1 < Y \leq b_2) = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy$$

もっと一般的に $D \subset (0,\, \infty) \times (0,\, \infty)$ としてとき，

$$P((X,\, Y) \in D) = \int\int_D f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy$$

が成立する．

このことに注意して，Z と分布関数を求めるために，任意の正の実数 z に対して，

$$D = \left\{(x,\, y) \in (0,\, \infty) \times (0,\, \infty) :\, \frac{x/m}{y/n} \leq z\right\}$$

$z > 0$ に対して，X と Y は正値確率変数なので，

$$G_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{X/m}{Y/n} \leq z\right) = 0$$

また，任意の正の実数 z に対して，

$$\begin{aligned} G_Z(z) &= P(Z \leq z) = P\left(\frac{X/m}{Y/n} \leq z\right) \\ &= \int\int_D f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^{\frac{m}{n}yz} f_X(x)\, dx\right) f_Y(y)\, dy \end{aligned}$$

両辺を z で微分 (積分記号と微分記号の交換可能を仮定) する：$z > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} g_Z(z) &= \frac{d}{dz} G_Z(z) \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dz}\left(\int_0^{\frac{m}{n}yz} f_X(x)\, dx\right) f_Y(y)\, dy \\ &= \int_0^\infty f_X(\frac{m}{n}yz)\frac{m}{n}y f_Y(y)\, dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)}\left(\frac{m}{n}yz\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\frac{m}{n}yz}\frac{m}{n}y \\ &\quad \times \mathbb{1}_{(0,\,\infty)}(\frac{m}{n}yz)\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2}\,\mathbb{1}_{(0,\,\infty)}(y)\, dy \end{aligned}$$

$z \leq 0$ に対して，$g_Z(z) = \dfrac{d}{dz}G_Z(z) = 0$

$z > 0$ のとき，これを整理すると

$$\begin{aligned} g_Z(z) &= \int_0^\infty \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)}\left(\frac{m}{n}yz\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\frac{m}{n}yz}\frac{m}{n}y \\ &\quad \times \mathbb{1}_{(0,\,\infty)}(\frac{m}{n}yz)\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2}\,\mathbb{1}_{(0,\,\infty)}(y)\, dy \\ &= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} z^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}}\int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}\left(1+\frac{m}{n}x\right)} y^{(m+n)/2-1}\, dy \end{aligned}$$

あとはつぎの積分を評価すればよい：

$$\int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}\left(1+\frac{m}{n}x\right)} y^{(m+n)/2-1}\, dy$$

そのために

$$v = \frac{y}{2}\left(1+\frac{m}{n}z\right)$$

と置換すると

$$y\Big|_0^\infty = \frac{2v}{1+\frac{m}{n}z}\Big|_0^\infty, \qquad dy = \frac{2}{1+\frac{m}{n}z}dv$$

から

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}\left(1+\frac{m}{n}z\right)} y^{(m+n)/2-1}\,dy &= \int_0^\infty e^{-v}\frac{2^{(m+n)/2-1}v^{(m+n)/2-1}}{(1+\frac{m}{n}x)^{(m+n)/2-1}}\frac{2}{1+\frac{m}{n}z}\,dv \\ &= 2^{(m+n)/2-1}\left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-(m+n)/2}\int_0^\infty e^{-v}v^{(m+n)/2-1}\,dv \\ &= 2^{(m+n)/2-1}\left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-(m+n)/2}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\end{aligned}$$

これより，$z > 0$ のとき，

$$\begin{aligned} g_Z(z) &= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} z^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}}\int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}\left(1+\frac{m}{n}x\right)}y^{(m+n)/2-1}\,dy \\ &= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} z^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}}2^{(m+n)/2-1}\left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-(m+n)/2}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} z^{m/2-1}\left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-(m+n)/2}\end{aligned}$$

したがって，

$$g_Z(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} z^{m/2-1}\left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-(m+n)/2}\mathbb{1}_{(0,\,\infty)}(z)$$

独立な1000 個の χ^2 から F 分布の値を 1000 個作成するプログラム

```
> c8rand<-rchisq(1000,8)    # 自 由 度 8 の カ イ 自 乗 分 布 乱 数
を 1000 個生成
> c10rand<-rchisq(1000,10)     # 自由度 10 のカイ自乗分布乱数
を 1000 個生成
> fprop<-(c8rand/8)/(c10rand/10)     # 自由度 10 の F 分布乱
数を 1000 個生成
> hist(fprop)
> hist(fprop)$count
 [1] 501 342 100  35  13   4   2   1   1   1
> hist(fprop,nclass=20,freq=F,ylim=c(0,0.8))
> fdens8.10<-function(x)(df(x,8,10))                # 自  由
度 (8, 10) の F  分布確率密度関数を設定
> curve(fdens8.10,0,5,col=4,add=T)     # 密度関数をヒストグラ
ムに上書き
```

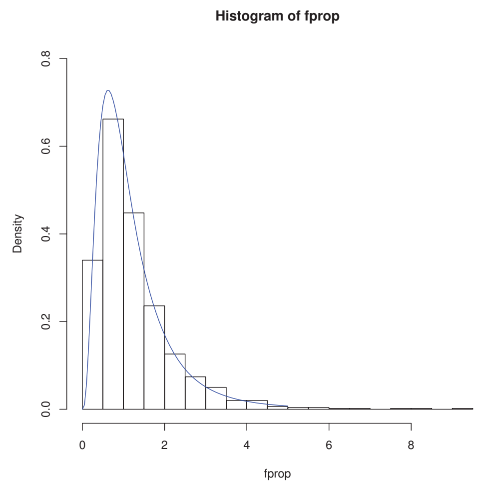



Figure 7: 自由度 (8, 10) の F 分布乱数とその確率密度関数のグラフ

独立な1000 個の χ^2 から F 分布の値を 1000 個作成するプログラム

```
> c5rand<-rchisq(1000,5)
> c8rand<-rchisq(1000,8)
> fdens5.8<-function(x)(df(x,5,8))
> fprop<-(c5rand/5)/(c8rand/8)
> hist(fprop)$count
 [1] 396 359 150  59  21   7   1   3   0   1   1   1   1
>
> hist(fprop,nclass=20,freq=F,ylim=c(0,0.7))
> curve(fdens5.8,0,10,col=2,add=T)
```

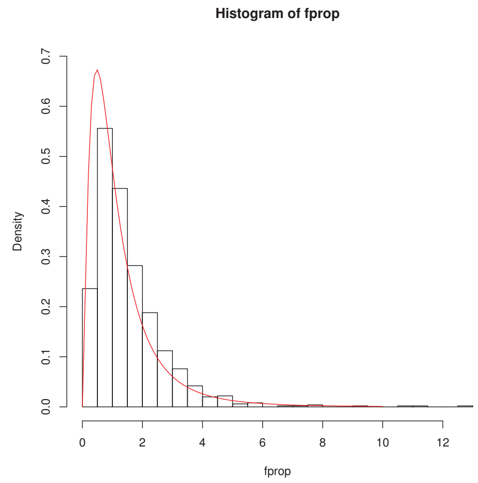



Figure 8: 自由度 $(5, 8)$ の F 分布乱数とその確率密度関数のグラフ

ここまでのまとめ

- F 分布の確率密度関数の形はわかりました？
- F 分布は独立なふたつの χ^2 分布から導出されることはわかりましたか？

問題２

(1) 適当な自由度の F の確率密度関数のグラフを 5 つ書け.（21416***-F1.pdf）色を変えてグラフを書き，各色のグラフに対応する自由度を 21416***-目白花子-2015-11-24.txt に書け.

(2) 自由度 m と n の χ^2 分布の乱数を 1000 個つくり 1 000 個の F 分布乱数を作成し，そのヒストグラムと自由度 (m, n) の F の分布の確率密度関数を書き入れたものを作成せよ．ただし，自由度は m と n は適当なもの（例にないもの）を選択せよ.（21416***-F2.pdf）

- それぞれの問題の解説を 21416***-目白花子-2015-11-27.txt に書け.
- 締め切りは 2015 年 11 月 27 日（金）13 時