# 確率統計と情報処理・演習（2015 年度後期）

# 確率分布

**2015 年 12 月 18 日**

日本女子大学理学部数物科学科　　今野 良彦

August 13, 2015

# 今日の講義の目的と概要

- 検定について
  - 検定の用語
  - 正規分布の母平均の検定（母分散 $\sigma^2$ が既知の場合）
  - 正規分布の母平均の検定（母分散 $\sigma^2$ が未知の場合）
  - シミュレーション
  - 正規分布の母分散の検定
  - 検出力

# 検定とは

$\star$ 推定では母数に対する事前の知識がない場合に，その母数の値がどんなものであるかを知るのが目的であった．これに対して検定問題では母数に対して，こんな値らしいという情報があり，その真偽をデータから確かめてみるのが目的.

$\star$ 検定問題は２つの仮説：**帰無仮説** $H_0$ と**対立仮説** $H_1$ のどちらかがもっともらしいかを，確率をもとに判断する.

$\star$ 帰無仮説が正しいと仮定して，得られたデータ（統計量）の起きる確率を計算し，その確率が小さい場合には,「確率が小さい，めったに起きないことがたった１回の標本で起こきるのはどこかがおかしい」と考えることにし，真偽を不明のまま，正しいと仮定した帰無仮説を疑うことにする.

$\star$ 帰無仮説が真であれば，統計量の値が得られる確率は小さいはずがないと考え，確率が小さくなっているのは帰無仮説が誤りであるとし，帰無仮説を否定する.

$\star$ 検定では「帰無仮説を棄却する」という.

⋆ 統計量がどんな範囲の値のときに棄却するか，その範囲を「**棄却域**」という．

⋆ 逆に帰無仮説を認めるとき,「帰無仮説を受容する」とか「帰無仮説を棄却できなかった」といい，その範囲を「**受容域**」という．

⋆ 検定の誤り

- 帰無仮説を正しいと仮定して計算した確率が小さい場合には，帰無仮説を棄却するという考えでは，帰無仮説が正しいのに，たまたま珍しい（確率が小さな）ことが起こったときに，正しい帰無仮説を棄却するいう誤りを犯してしまうことになる．これを検定の「**第一種の誤り**」という．

- この逆に，帰無仮説は正しくないときに，計算して確率が小さくないので，正しくない帰無仮説を受容してしまう誤りがある．これを検定の「**第二種の誤り**という．

⋆ 危険率 — この２種類の誤りは，両方ともできるだけ小さくしたいが．両者を同時に小さくすることはできない．このため，第一種の誤りに条件をつけよ

う．第一種の誤りをどこまで許容するかというガイドラインを「危険率」といい，検定の前に定める．この値 $\alpha$ をいくらにするかは検定の目的や個別分野の問題であるが，統計学の例では 0.05(5%)．0.01(1%)，0.001(0.1%) という値がよく使われる．第一種の誤りを危険率以下にし，その上で第二種の誤りの確率ができるだけ小さくなるように検定手法を定めることになる．

$\star$ このため第一種の誤りは高々危険率 $\alpha$ であり，帰無仮説を棄却したとき，その結論が誤っている可能性は小さい．これに対して，第二種の誤りの確率の値は多くの場合計算できない．値がわからないのであれば，最悪の場合を考えておこう．帰無仮説を受容したとき，その結論が誤っている可能性は大きい．すなわち，検定結果が意味があるのは，誤っている可能性の小さい「帰無仮説を棄却した場合」だけであり，このとき「検定結果は有意である」という．反対に,「帰無仮説を受容した場合」には，その結果には意味がなく.「検定結果は有意でない」という．この意味で，危険率は**有意水準**ともよばれる．

$\star$ $p$ 値 — 検定結果を示すとき，危険率（有意水準）をどんな値にすれば，検定結果が有意になるかという値を示すことがある．これを $p$ **値**という．

# 正規分布の母平均の検定（母分散 $\sigma^2$ が既知の場合）

$\star$ 母平均 $\mu$ の候補の値 $\mu_0$ が与えられており，これが正しいか否かを標本

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

に基づいて判断する．与えられた $\mu_0$ を帰無仮説 $H_0$ とし，その否定を対立仮説 $H_1$ としよう．

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \quad \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$

この対立仮説の場合，帰無仮説を棄却した場合には， $\mu$ の値 $\mu_0$ より大きい場合も，小さい場合もあり得る．これに対して旧製法と新製法を比較し，新製法が旧製法より悪くないことが分かっている場合には，新製法の平均 $\mu$ は旧製法

の平均値 $\mu_0$ より大きいという対立仮説

$$H_1' : \mu > \mu_0$$

を考える場合もある（不等号は逆向きの場合もある）．これを $\mu$ の値を $\mu_0$ より大きい「片側」の方向にしか考えていないので「**片側対立仮説**」といい，$H_0$ vs. $H_1'$ の検定問題を「**片側検定**」という．これに対して $H_0$ vs. $H_1$ の検定問題を「**両側検定**」という．

$\star$ 帰無仮説 $H_0$ が正しいと仮定すると，標本平均 $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ は平均 $\mu_0$，分散 $\sigma^2/n$ の正規分布 $N(\mu_0, \sigma^2/n)$ に従う.

$\star$ 基準化した

$$\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従う.

$\star$ この値がゼロから離れた値のとき，すなわち絶対値 $|Z|$ が大きなとき，絶対値 $|Z|$ が大きな値をとる確率は小さい.

$P(Z < -3\ )$

```
> pnorm(-3)
[1] 0.001349898
```

この確率であれば 1000 回に 1 回程度しか起きない，珍しい希有な結果である.

確率が小さい希有な結果が起きるのはおかしいと考え，確率計算した仮定がおかしかったので，確率が小さくなったと考えるのが，仮説検定の立場であり，帰無仮説 $H_0$ が正しいと仮定したこを誤りとしよう．すなわち，帰無仮説 $H_0$ は正しくないと判断しよう．統計では「**帰無仮説 $H_0$ を棄却する**」という結論を下すことになる．

$\star$ 帰無仮説 $H_0$ が他だしと仮定して計算した確率が小さくなったときには，帰無仮説を棄却するという方針は立ったが，どんな値のときに小さいと判断するかの基準がいる．これには「危険率」を用いる．

$$P(|Z| > k) \text{ のとき } H_0 \text{ を棄却}$$
$$\text{第一種の誤りの確率 } P(|Z| > k) \leq \alpha$$

の条件のもとで第二種の誤りの確率を最小にするために，

$$P(|Z| > k) = \alpha$$

となる $k = k_{\alpha/2}$ を数表から求め，

$$|Z| > k_{\alpha/2} \text{ のとき帰無仮説 } H_0 \text{ を棄却}$$
$$\text{そうでないとき，帰無仮説 } H_0 \text{ を受容}$$

# 正規分布の母平均の検定（母分散 $\sigma^2$ が未知の場合）

$\star$ 両側検定

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$

を考える．

$\star$ 母分散が既知の場合には

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

が標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従うことを用いて，棄却域を作った．

$\star$ 母分散が未知の場合には $\sigma^2$ の代わりに，その不偏推定量である不偏分散 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ を代入する．

$\star$ このとき，

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{u^2}{n}}}, \quad u^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

は自由度 $(n-1)$ の $t$ 分布従うことより

$$P(|T| > t_{n-1}(\alpha/2)) = \alpha$$

となる点 $t_{n-1}(\alpha/2)$ を求め，

$|T| > t_{n-1}(\alpha/2)$ のとき帰無仮説 $H_0$ を棄却
そうでないとき，帰無仮説 $H_0$ を受容

# シミュレーション：母平均の検定（母分散が既知の場合）

$\star$ 母平均 0，母分散 $1^2$ の正規分布 $N(0,1^2)$ に従う母集団（正規乱数）から $n$ 個の標本をとり，

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \quad \mu = \mu_0 \\
H_1 &: \quad \mu \neq \mu_0
\end{aligned}
$$

を検定してみよう．

## 標本数 $n$，有意水準 $\alpha$

```
n.test<-function(n, alpha){
  k <- qnorm(1 - alpha /2 )
  x <-rnorm(n)
  barx<-mean(x)
  z<-barx/sqrt(1/n)
  ifelse(abs(z) >k, T, F)
}
> n.test(10,0.05)
[1] FALSE
> n.test(10,0.05)
[1] TRUE
```

## 標本数 $n$，有意水準 $\alpha$ の検定を nsim 回行う

```
sim.n.test<-function(nsim, n, alpha){
  r<-c()
  for (i in 1:nsim)
    r<-c(r,n.test(n,alpha))
   r
}
> rslt<-sim.n.test(100,10,0.05)
> rslt
  [1]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
 [16]    0    0    0    0    0    0    0 1000    0    0    0    0
 [31]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
 [46]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
 [61]    0 1000    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
 [76]    0    0    0    0    0    0    0    0 1000    0    0    0
 [91]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
> which(rslt>0)
# 論理値のときは
# which(rslt)
[1] 23 62 84 90
```

nsim 回のシミュレーション回数中，有意になった標本が何組あるかを数えることをnrepeat 回繰り返す.

```
histsig<-function(nrepeat,nsim, n, alpha){
   n.sig<-c()
   for ( i in 1:nrepeat)
     n.sig<-c(n.sig,length(which(sim.n.test(nsim,n,alpha))))
   n.sig
}
> rsim<-histsig(1000,100,10,0.05)
> hist(rsim)
```

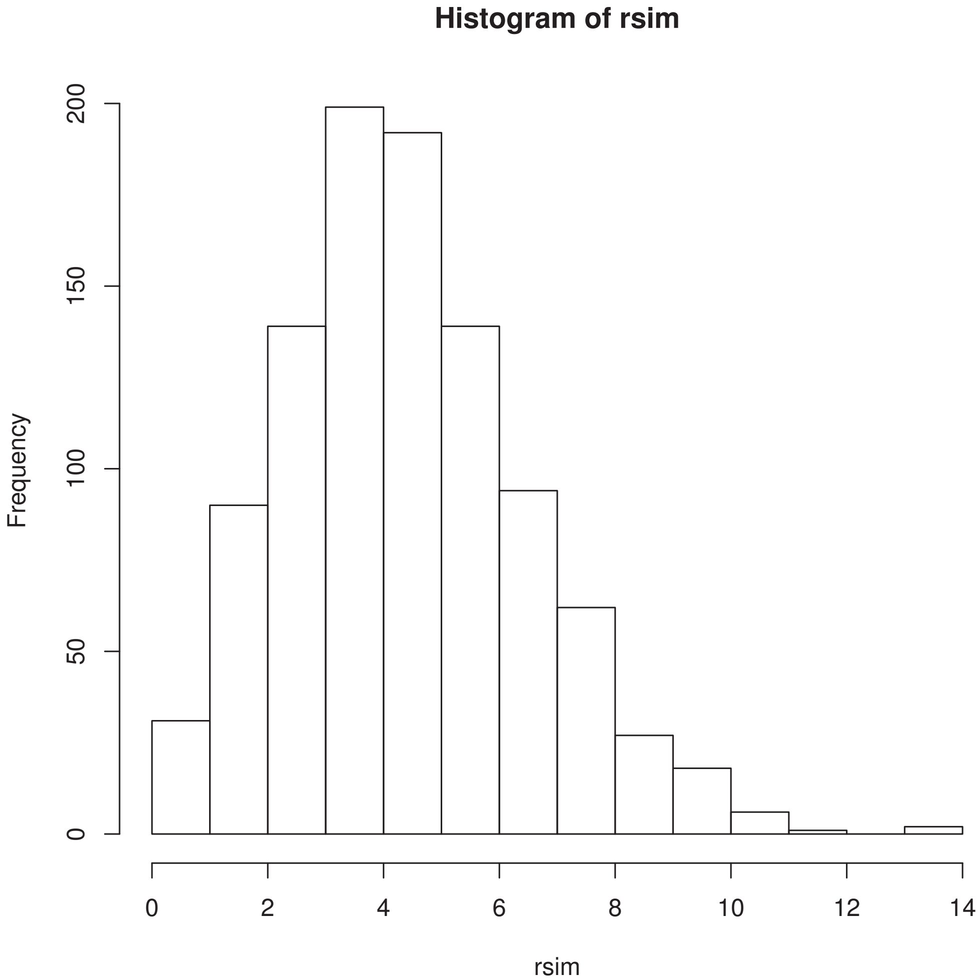


Figure 1: 100 回中に有意になった回数の分布

# シミュレーション：母平均の検定（母分散が未知の場合）

```
t.test.p<-function(n, alpha){
  conf<-1 - alpha
  x<-rnorm(n)
  t.p.value<-t.test(x,conf.level=conf)$p.value
  ifelse(t.p.value < alpha, T, F )
}
> t.test.p(10,0.5)
[1] FALSE  # 検定が有意でなかった
> t.test.p(10,0.05)
[1] 1000   # 検定が有意であった
```

# t.test を nsim 回行い，各回の有意性をベクトルで戻す関数

```
sim.t.test<-function(nsim, n, alpha){
  r<-c()
  for (i in 1:nsim)
    r<-c(r,t.test.p(n,alpha))
  r
}
> rslt<-sim.t.test(100,10,0.05)
> rslt
  [1]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
 [16]    0    0    0    0    0    0 1000    0 1000    0    0    0
 [31]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
 [46]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
 [61]    0    0 1000    0    0    0    0    0    0    0    0    0
 [76]    0    0    0    0    0 1000    0    0    0    0    0    0
 [91]    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
> which(rslt>0)
# 論理値のときは
# which(rslt)
[1] 22 24 63 81
```

nsim 回のシミュレーション回数中，有意になった標本が何組あるかを数えることをnrepeat 回繰り返す.

```
hist.t.sig<-function(nrepeat,nsim, n, alpha){
   n.sig<-c()
   for ( i in 1:nrepeat)
     n.sig<-c(n.sig,length(which(sim.n.test(nsim,n,alpha))))
   n.sig
}
rsim<-hist.t.sig(1000,100,10,0.05)
 hist(rsim)
```

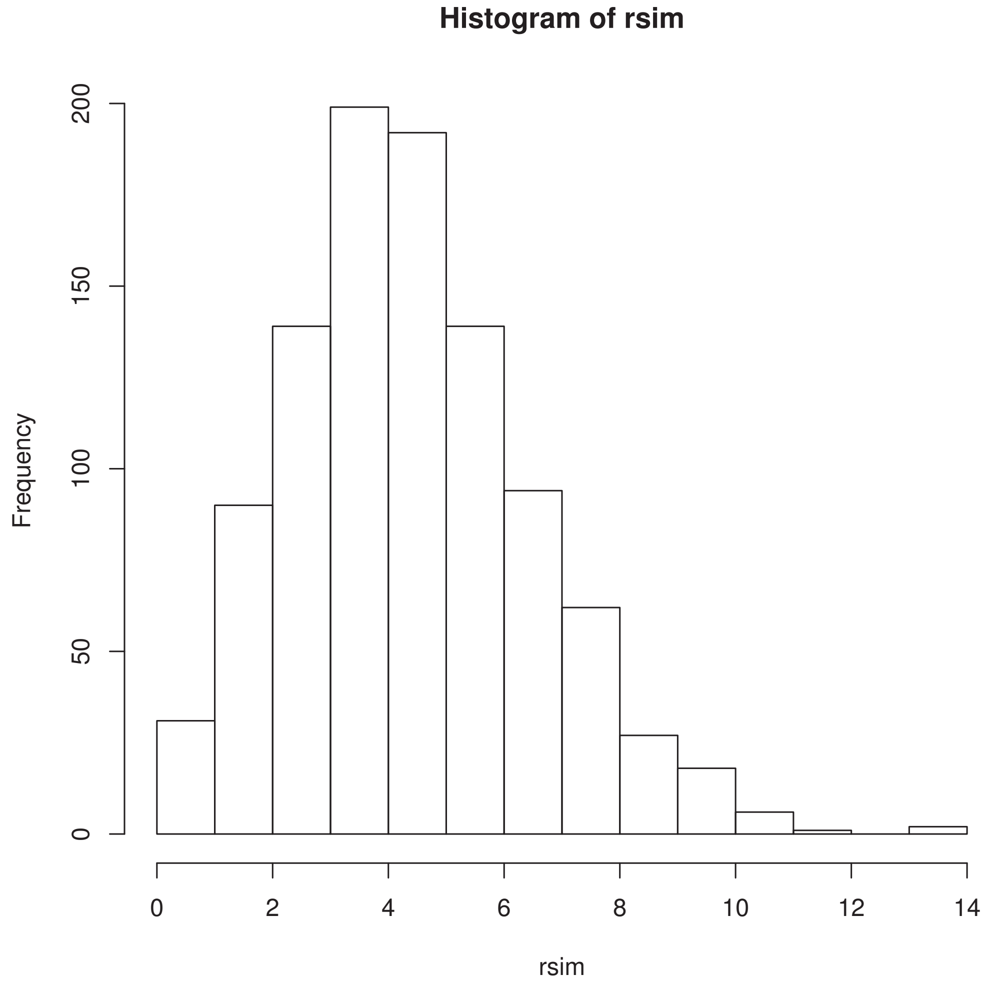


Figure 2: 100 回中に有意になった回数の分布

# 正規分布の母分散の検定

$\star$ 両側検定

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 &: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{aligned}$$

を考える.

$\star$ $H_0$ を正しいと考えると

$$X_1,\, X_2\, \ldots,\, X_n \sim N(\mu,\, \sigma_0^2)$$

より

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma_0} \right)^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

となり，有意水準 $\alpha$ より，自由度 $n-1$ の $\chi^2$ 分布の上側$\alpha/2$ 点 $\chi_{n-1}^2(\alpha/2)$ と下側 $\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)$ を求め

$$\chi_0^2 > \chi_{n-1}^2(\alpha/2) \text{ または } \chi_0^2 < \chi_{n-1}^2(1-\alpha/2) \quad \Rightarrow \quad H_0\text{を棄却}$$

$$\text{その他の場合} \quad \Rightarrow \quad H_0\text{を受容}$$

$\star$ 標本数 10，有意水準 0.05 の場合，$\chi_{10-1}^2(0.05/2) = \chi_9^2(0.025) = 19.02277$, $\chi_{10-1}^2(1-0.05/2) = \chi_9^2(0.975) = 2.700389$

```
chiL<-qchisq(0.025,9)
chiL
[1] 2.700389
chiU<-qchisq(0.975,9)
chiU
[1] 19.02277

chisqdens9<-function(x)
  dchisq(x,9)

curve(chisqdens9,0,30)
lines(c(chiU,chiU),c(0,dchisq(chiU,9)),col=2)
lines(c(chiL,chiL),c(0,dchisq(chiL,9)),col=2)
```

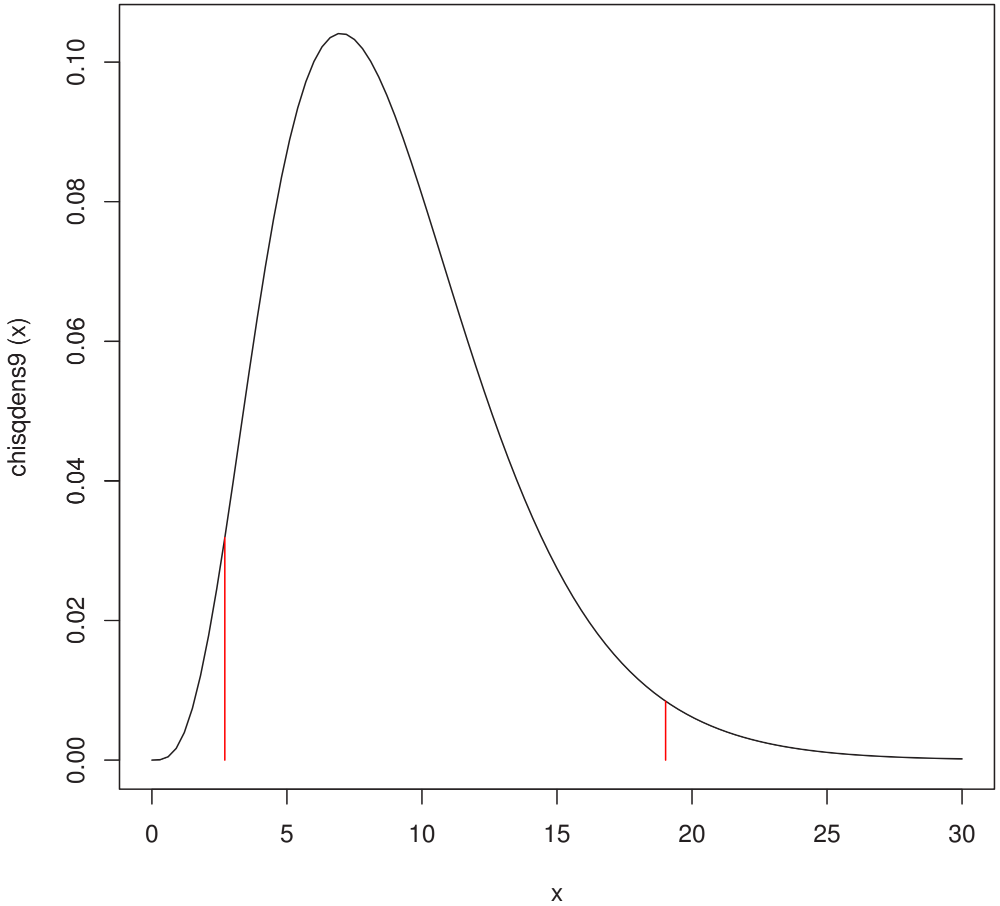


Figure 3: 自由度 9 の $\chi^2$ 分布密度関数と限界値

$\star$ 標準正規分布 $N(0, 1^2)$ より $n = 10$ 個の標本をとり，$H_0 : \sigma^2 = 1 (= \sigma_0^2)$ vs. $H_1 : \sigma^2 \neq 1$ の検定を 100 回繰り返す．R の関数 sd は不偏分散の平方根を計算するので，

$$\begin{aligned} \chi_0^2 &= \sum_{i=1}^{10} \left( \frac{x_i - \bar{x}_n}{\sigma_0} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}_n)^2}{\sigma_0^2} \\ &= \frac{(n-1)\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}_n)^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)u^2}{\sigma_0^2} \end{aligned}$$

と表現できる．

```
x<-sapply(rep(10,100),rnorm)
sdx<-apply(x,2,sd)
ssq<-sdx*sdx*9
chi0<-ssq/1
points(chi0,runif(100)*0.0001)
```

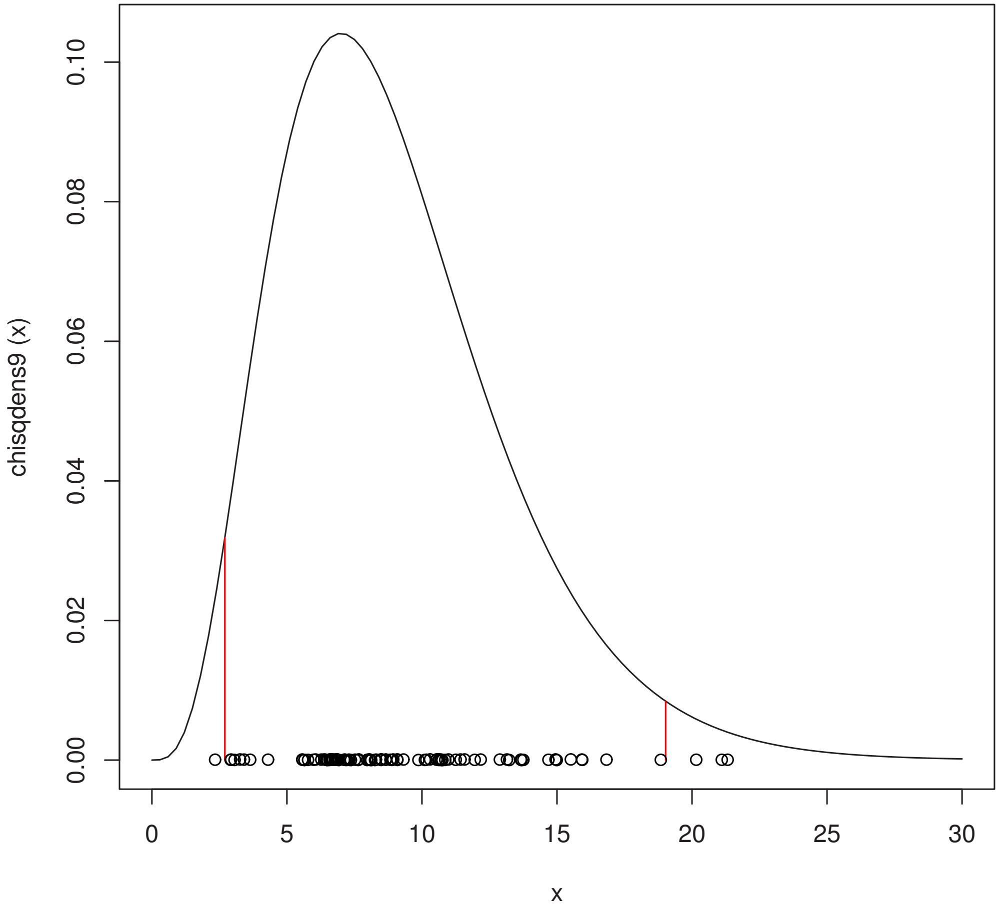


Figure 4: シミュレーションによる検定統計量の分布

```
for (i in chi0)
  if (i < chiL || i > chiU)
    print (i)
[1] 2.34019
[1] 21.3196
[1] 21.10256
[1] 20.15637
```

# 検出力

⋆ 正規分布の母平均の検定で，第二種の誤りの確率は

$$H_0:\ \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu = \mu_1$$

の場合には計算できる．

⋆ 母集団が $N(\mu_1, 1^2)$ に従っている場合（すなわち対立仮説 $H_1$ が正しいとき）に，帰無仮説 $H_0$ を棄却する確率を**検出力**（$H_0$ が正しくないことを検出する確率）という．言いなおすと

$$\text{検出力} = 1 - \text{第二種の誤りの確率}$$

$\mu_1$ の関数として検出力をあらわしたものを**検出力関数**という．

$$\beta(\mu_1) = P(H_1 | \mu_1)$$

特に,

$$\beta(\mu_0) = P(H_1 |\, \mu_0)$$

となり，$H_0$ が正しいときに $H_1$ を採用する第一種の誤りの確率に一致する.

# シミュレーション

```
test.power.1<-function(n,alpha,mu1){
  k<-qnorm(1 - alpha/2 )
  x<-rnorm(n,mean=mu1)
  barx<-mean(x)
  z<-barx/sqrt(1/n)
  if (abs(z) > k )
    T
   else
     F
}
test.power.1(10,0.05,0)
[1] 1000  $ FALSE 有意でない
```

```
test.power<-function(nsim,n,alpha,mu1){
  r <-c()
  for (i in 1:nsim)
    r<-c(r,test.power.1(n,alpha,mu1))
  length(which(r))/nsim
}
> test.power(1000,10,0.05,0)
[1] 0.048
> test.power(1000,10,0.05,0.1)
[1] 0.07
for(mu1 in seq(-2,2,0.1))
  cat(c(mu1,test.power(1000,10,0.05,mu1)),"\n")

-2 1
-1.9 1
-1.8 1
-1.7 1
-1.6 1
-1.5 0.997
-1.4 0.992
-1.3 0.98
-1.2 0.973
-1.1 0.94
-1 0.874
-0.9 0.812
-0.8 0.749
-0.7 0.617
-0.6 0.467
-0.5 0.36
-0.4 0.247
-0.3 0.164
```

```
mu1<-seq(-2,2,0.1)

calc.power<-function(nsim,n,alpha,mu){
  rslt<-c()
  for(i in mu)
    rslt<-c(rslt,test.power(nsim,n,alpha,i))
  rslt
}

prslt<-calc.power(1000,10,0.05,mu1)
prslt
 [1] 1.000 1.000 1.000 0.999 1.000 0.997 0.996 0.993 0.961 0.922 0.8
[13] 0.713 0.631 0.476 0.362 0.235 0.167 0.093 0.064 0.049 0.060 0.0
[25] 0.220 0.345 0.457 0.581 0.718 0.802 0.876 0.925 0.969 0.990 0.9
[37] 0.999 1.000 1.000 1.000 1.000

plot(mu1,prslt,type="l")
```

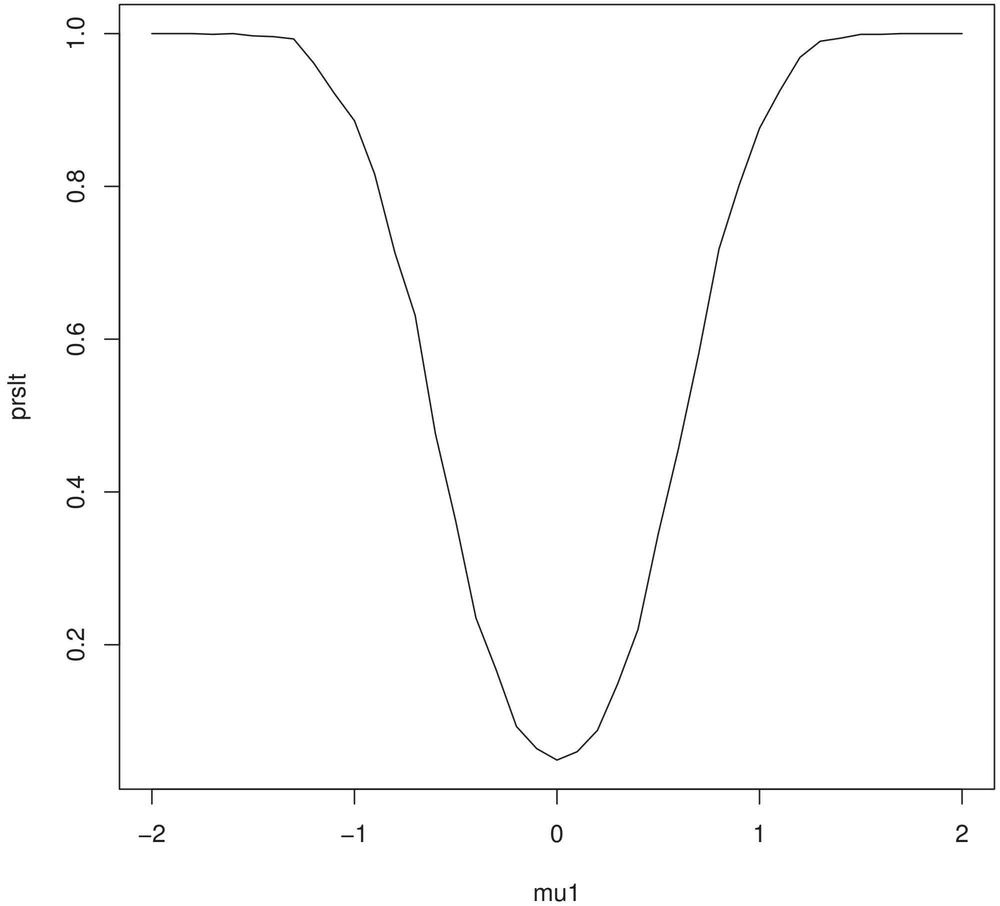


Figure 5: 検出関数のグラフ（シミュレーション）

# 検出力関数のグラフ

$\star$ 検定問題

$$H_0: \mu = \mu_0 = 0 \text{ vs. } H_1: \mu = \mu_1$$

で，母分散は既知とする．

$\star$ 検定統計量

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

となり，$Z$ の絶対値が有意水準 $\alpha$ から定まる限界値 $k$ より大きいか否かで，有意か有意でないかが定まる．

$\star$ $\mu = \mu_1 \neq \mu_0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \\
&= \frac{\bar{X}_n - \mu_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}
\end{aligned}
$$

より

$$
Z \sim N(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}},\, 1^2) = N(\nu,\, 1^2)
$$

# 検出力関数は

$$
\begin{aligned}
\text{Power } (\mu_1) &= 1-\beta(\mu_1) = 1 - P(|Z| < k) \\
&= 1 - P(-k < Z < k) = 1 - P(-k-\nu < Z - \nu < k - \nu), \\
& \quad \nu = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}
\end{aligned}
$$

```
power.theo<-function(mu,alpha,n){
  qa<-qnorm(1-alpha/2)
  tmp<-(mu - 0 ) /sqrt(1/n)
  err2<-pnorm(qa-tmp)-pnorm(-qa-tmp)
  1-err2
}

x<-seq(-3,3,0.01)
plot(x,power.theo(x,0.05,10),type="l")
```

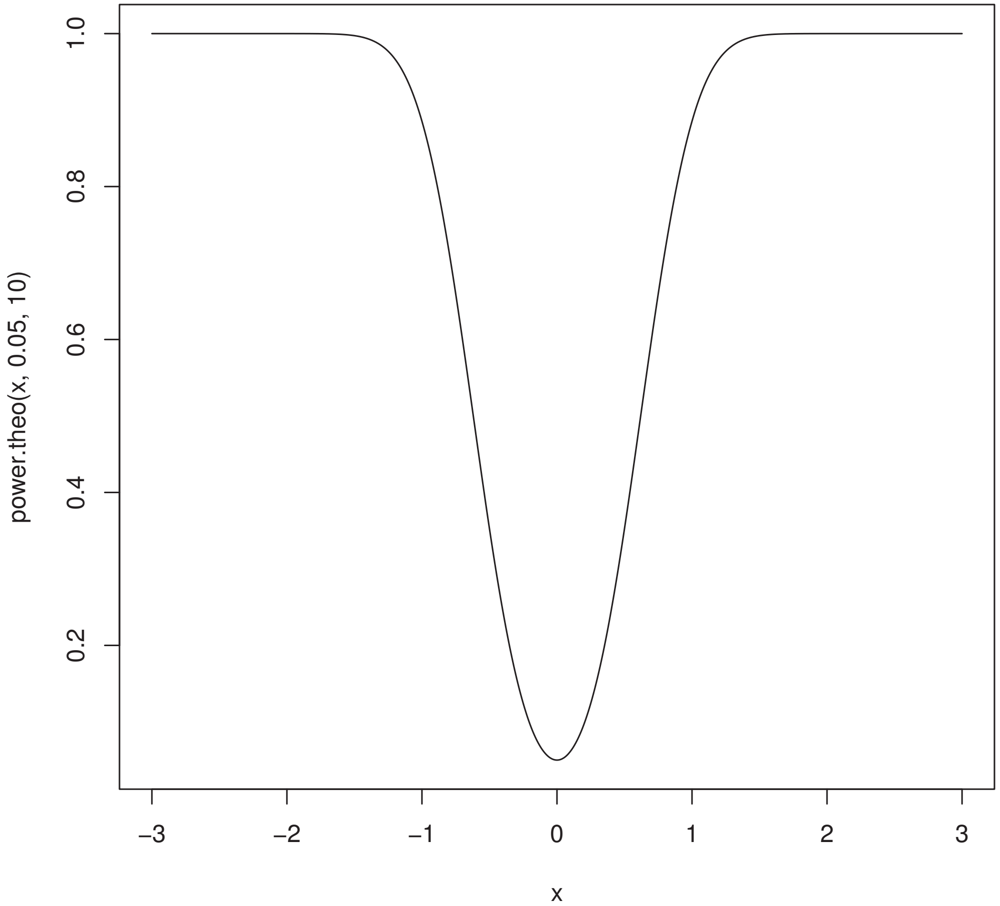


Figure 6: 検出関数のグラフ