

確率統計と情報処理・演習の試験問題 (試験時間は 90 分)

解答上の注意

特別な指示がある場合を除き、答えが合っているかどうかよりも解答の途中過程の論理的展開を重視して採点をします。以下の点に留意して解答を作成すること。

- (1) 解答の途中過程は丁寧に記述すること。
- (2) 講義で述べたことは設問中で証明することを求めている場合には証明なしに用いてよい。しかし、なにをどのように用いたかを可能な限り明示すること。
- (3) 各自が理解していることを採点者にわかるように解答を作成することを心がけること。
- (4) 等号の使い方に注意すること。
- (5) どの問題を解答しているかが明示されていれば、解答は問題番号順でなくともよい。

答案は来年度開講の「統計解析」の第 1 回目の講義で返却をする。受講しないものは研究室まで取りに来てください。

問題 1 関数 $\mathbb{P}(\cdot)$ で、つぎの条件をみたすものを考える¹：

(P1) すべての事象 A に対して、 $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

(P2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(P3) 事象 A と B が互いに排反のとき、 $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ が成立

このとき、以下の問いに答えよ。ただし、 A と B は事象とし、 A^c は A の補事象である。

(1) 事象 A に対し、 $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ を示せ。

(2) $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

解答と配点 (1) 10 (2) 10 計 20

(1) 補事象の定義から $A \cap A^c = \emptyset$ となるので、 A と A^c は互いに排反。さらに、 $A \cup A^c = \Omega$ より

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(\Omega) && \text{(確率の性質 (P2) より)} \\ &= \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) && \text{(確率の性質 (P3) より)} \end{aligned}$$

(2) $A \cap B^c, A \cap B, A^c \cap B$ は互いに排反で、 $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = A \cup B$ に注意して、P3 を用いれば、

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

しかし、確率の性質 (P1) より $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$ なので、

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

となる。

問題 2 「2 人の子供がいる家庭について、子供の男女の性別を調べる」という試行を考える。女兒を g ，男児を b で表す。たとえば、生まれた順が、女、男ならば、 gb と書く。標本空間は

$$\Omega = \{gg, gb, bg, bb\}$$

となる。男女の出生比率は $\frac{1}{2}$ とし、

$$\mathbb{P}(gg) = \mathbb{P}(gb) = \mathbb{P}(bg) = \mathbb{P}(bb) = \frac{1}{4}$$

¹ $\mathbb{P}$ を教科書では Pr と書いている。

とする．

いま，女子の人数 X だけに注目する．標本点 ω が与えられれば， X の値を標本点の女子の人数に対応させる，その意味で X は ω の関数 $X = X(\omega)$ となる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{P}(X = 0)$ を求めよ．

(2) $\mathbb{P}(X = 1)$ を求めよ．ただし，答えのみでなく確率の条件をどのように使い求めたかを明記せよ．

(3) 確率変数 X の確率関数 $f_X(x)$ を求めよ．

(4) 確率変数 X の累積分布確率関数 $F_X(x)$ を求め，そのグラフを作図せよ．

解答と配点 (1) 5 (2) 5 (3) 5 (4) 5 計 20

(1) $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(bb) = \frac{1}{4}$

(2) 事象 $\{gb\}$ と $\{bg\}$ は排反であるので，

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{gb\} \cup \{bg\}) = \mathbb{P}(\{gb\}) + \mathbb{P}(\{bg\}) = \frac{1}{2}$$

(3)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (x = 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 1) \\ \frac{1}{4} & (x = 2) \end{cases}$$

(4)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \frac{1}{4} & (0 \leq x < 1) \\ \frac{3}{4} & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

問題 3 $n \geq 2$ を自然数とし， X を離散型確率変数とする． X は有限の点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ において正の確率を持つとする．すなわち， $\mathbb{P}(X = x_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) である．このとき， X の期待値と分散は

$$\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n x_i f_X(x_i)$$

$$\mathbb{E}[aX + b] = \sum_{i=1}^n (ax_i + b) f_X(x_i)$$

$$\text{VAR}[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f_X(x_i)$$

$$\text{VAR}[aX + b] = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - \mathbb{E}[aX + b])^2 f_X(x_i)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{i=1}^n x_i^2 f_X(x_i)$$

である．ただし， a と b を定数とした．このとき，以下のことを示せ．

$$(1) \mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$$

$$(2) \text{VAR}[aX + b] = a^2 \text{VAR}[X]$$

$$(3) \text{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2$$

ただし，確率関数 f_X の性質を利用してよい：

(i) $\mathbb{P}(X = x_i) = f_X(x_i) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$

(ii) $\sum_{i=1}^n f_X(x_i) = 1$

解答と配点 (1) 10 (2) 10 (3) 10 計 30

(1) $\sum_{i=1}^n f_X(x_i) = 1$ より

$$\mathbb{E}[aX + b] = \sum_{i=1}^n (ax_i + b)f_X(x_i) = a \sum_{i=1}^n x_i f_X(x_i) + b \sum_{i=1}^n f_X(x_i) = a\mathbb{E}[X] + b$$

(2)

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\mathbb{A}\mathbb{R}[aX + b] &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b - \mathbb{E}[aX + b])^2 f_X(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b - a\mathbb{E}[X] - b)^2 f_X(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (ax_i - a\mathbb{E}[X])^2 f_X(x_i) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x_i) = a^2 \mathbb{V}\mathbb{A}\mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\mathbb{A}\mathbb{R}[X] &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f_X(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) f_X(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 f_X(x_i) - 2\mu \sum_{i=1}^n x_i f_X(x_i) + \mu^2 \sum_{i=1}^n f_X(x_i) \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \times \mu + \mu^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 \end{aligned}$$

問題 4 大小ふたつのサイコロを投げる場合には，標本空間は

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \dots, 6\}$$

となる．ただし， i は大きいサイコロの目， j は小さいサイコロの目とする．このとき，

$$\mathbb{P}\{(i, j)\} = \frac{1}{36}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6$$

となる．確率変数 X を

$$X((i, j)) = i + j$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，(1) と (4) のみ途中経過を記述しなくともよい．

(1) $\mathbb{P}(X = x) > 0$ となる x の値をすべてもとめよ．

(2) $\mathbb{P}(X = 3)$ の確率を求めよ．

(3) $\mathbb{P}(X = 6)$ の確率を求めよ．

(4) X の確率分布表を完成させよ．

解答と配点 (1) 5 (2) 5 (3) 5 (4) 5 計 20

(1) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

(2) $\mathbb{P}(X = 3)$ の確率を求めよ .

$$\{i + j = 3\} = \{(1, 2)\} \cup \{(2, 1)\}$$

に注意して ,

$$\mathbb{P}(i + j = 3) = \mathbb{P}(\{(1, 2)\} \cup \{(2, 1)\}) = \mathbb{P}(\{1, 2\}) + \mathbb{P}(\{2, 1\}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$$

となる .

(3)

$$\{i + j = 6\} = \{(1, 5)\} \cup \{(2, 4)\} \cup \{(3, 3)\} \cup \{(4, 2)\} \cup \{(5, 1)\}$$

に注意して ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(i + j = 6) &= \mathbb{P}(\{(1, 5)\} \cup \{(2, 4)\} \cup \{(3, 3)\} \cup \{(4, 2)\} \cup \{(5, 1)\}) \\ &= \mathbb{P}(\{1, 5\}) + \mathbb{P}(\{2, 4\}) + \mathbb{P}(\{3, 3\}) + \mathbb{P}(\{4, 2\}) + \mathbb{P}(\{5, 1\}) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{6}{36} \end{aligned}$$

となる .

(4)

X の値	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

問題 5 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとする . すわち ,

$$\mathbb{P}(a < Z \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz, \quad (\text{任意の } -\infty < a < b < \infty)$$

このとき ,

$$Y = Z^2$$

の確率密度関数が

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y/2} & (y > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられることを示せ .

解答と配点 計 10 点

Y の確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めるために , $F_Y(y)$ を y について微分する :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \\ &= \frac{d}{dy} \left\{ \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz - \int_0^{-\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{d}{dy} \sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{d}{dy} (-\sqrt{y}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{-1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y/2} \\ &= \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-y/2} \end{aligned}$$

注意 :

★ 2 番目の等号は定積分の性質を使っている！

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \\ \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx\end{aligned}$$

★ 3 番目の等号は微積分の基本的定理

$$\frac{d}{dx} \int_0^x g(z) dz = g(x)$$

と合成関数の微分を使っている！

解答と配点

成績について

得点	0 ~ 44	45 ~ 59	60 ~ 79	80 ~ 89	90 ~ 100
成績	D	C	B	A	A ⁺

得点分布 平均点 = 69.2 , 中央値 = 69.0、標準偏差 = 13.6

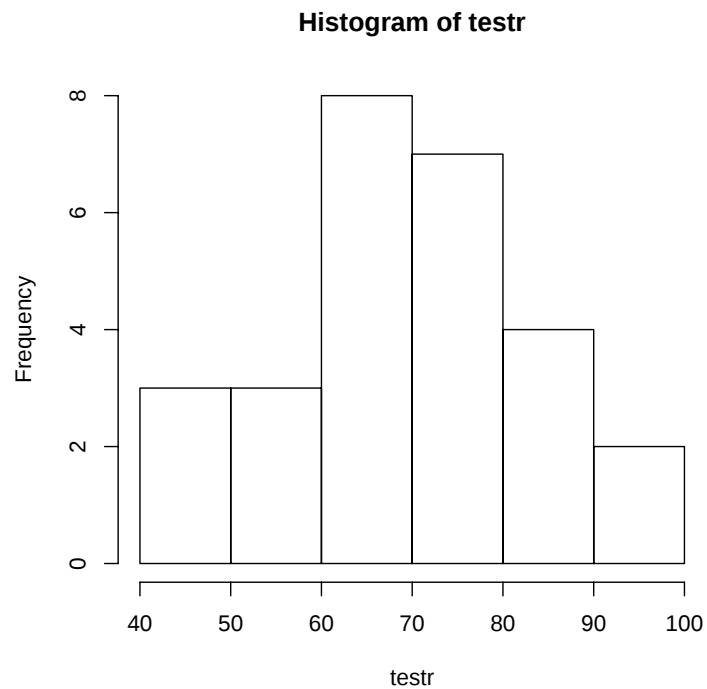


Figure 1: This is a figure