·····1.2·····

確率変数と累積分布関数

定義 1.5　確率空間 $(S, \mathcal{B}, P)$ 上において，写像 $X: S \to \mathbb{R}$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{s \in S:\ X(s) \in (-\infty, x]\} \in \mathcal{B}$$

をみたすならば，X は（実）確率変数という．

定義 1.6　確率空間 $(S, \mathcal{B}, P)$ 上の確率変数 X について

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(s \in S:\ X(s) \in (-\infty, x]), \qquad x \in \mathbb{R}$$

によって定義される $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 F_X を確率変数 X の累積分布関数という．

分布関数の性質

(i) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ かつ $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
(ii) $F_X(x)$ は x の非減少関数
(iii) $F_X(x)$ は右連続関数 ：すなわち，すべての x_0 に対して $\lim_{x \downarrow x_0} F_X(x) = F(x_0)$

定義 1.7　確率変数 X が連続型であるとは，X の分布関数 $F_X(x)$ が x の連続関数であることである．確率変数 X が離散型であるとは，X の分布関数 $F_X(x)$ が x の階段関数であることである．

定義 1.8　確率空間 $(S, \mathcal{B}, P)$ 上のふたつの確率変数 X, Y が同一分布に従うとは，すべての $\mathbb{R}$ 上の任意のボレル集合 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して $P(X \in A) = P(Y \in B)$ が成り立つことである．

定理 1.1　つぎのふたつは同値である．

(i) 確率変数 X, Y が同一分布に従う
(ii) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$F_X(x) = F_Y(x)$

定義 1.9　確率空間 $(S, \mathcal{B}, P)$ 上の離散型確率変数 X の確率関数を

$$f_X(x) = P(X = x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

定義 1.10　確率空間 $(S, \mathcal{B}, P)$ 上の連続型確率変数 X の確率密度関数 $f_X(x)$ は

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

をみたすものである．

定義 1.11　確率変数 X についてある実数 m が

$$\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{および} \qquad \mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$$

をみたすならば，m を X の中央値 (median) という．

<u>確率関数と確率密度関数の性質</u>

(i) ${}^{\forall}x \in \mathbb{R}$ に対し $f_X(x) \geq 0$
(ii) $\sum_x f_X(x) = 1$ (離散型) または $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (連続型)