·····5.1·····

基本的な確率不等式

定理 5.1　非負確率変数 $X \geq 0,\ a.s.$ と正数 $p > 0$ に対して,

$$\mathbb{E}X^p = \int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{P}(X > t)\,dt$$

が成立する.

証明　Fubini の定理を用いて変形すれば,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{P}(X > t)\,dt &= \int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{E}1_{(t,\,\infty)}(X)\,dt = \mathbb{E}\int_0^\infty pt^{p-1}1_{(t,\,\infty)}(x)\,dt \\ &= \mathbb{E}\int_0^X pt^{p-1}\,dt = \mathbb{E}X^p\end{aligned}$$

から命題は証明される. □

定理 5.2　(Markov の不等式)　$X \geq 0,\ a.s.$ とする．任意の $a > 0$ に対して,

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \frac{\mathbb{E}X}{a}$$

が成立する.

証明　$X \in [a,\,\infty)$ のとき，$X/a \geq 1$ に注意する：

$$\mathbb{P}\{X \geq a\} = \mathbb{E}[1_{[a,\,\infty)}(X)] \leq \mathbb{E}[\frac{X}{a}1_{[a,\,\infty)}(X)] \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}.$$

□

注意 5.1　Y を確率変数とする．$X = (Y - \mathbb{E}Y)^2$ とおけば，Chebyshev の不等式

$$\mathbb{P}\{|Y - \mathbb{E}Y| \geq a\} = \mathbb{P}\{(Y - \mathbb{E}Y)^2 \geq a^2\} \leq \frac{\mathbb{VAR}(Y)}{a^2}$$

を得る.

定理 5.3　(Jensen の不等式)　g は下に凸 (convex) とし，X と $g(X)$ は可積分とする．このとき,

$$g(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}g(X)$$

が成立する.

証明　任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ とある定数 c に対し，$g(x) \geq g(x_0) + c(x - x_0)$ が成立する．$x = X(\omega)$ として，期待値をとれば，$\mathbb{E}g(x) \geq g(x_0) + c(\mathbb{E}X - x_0)$ を得る．さらに，$x_0 = \mathbb{E}X$ とすれば，命題は証明される．□

定理 5.4　(Hölder の不等式) X, Y を確率変数で $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty, \mathbb{E}[|Y|^q] < \infty$ をみたすものとする．ただし，$p > 1$ かつ $1/p + 1/q = 1$ である．このとき，

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \mathbb{E}[|XY|] \leq \{\mathbb{E}[|X|^p]\}^{1/p}\{\mathbb{E}[|Y|^q]\}^{1/q}$$

が成立する．

証明　一般性を失わず，$X \geq 0, Y \geq 0$ を仮定してよい．さらに，$\mathbb{E}[X^p] = 0$ ならば，$X = 0,\ a.s.$ なり，この場合には，Hólder の不等式は明らかに成立するので，$\mathbb{E}[X^p] > 0$ を仮定する．

いま，$C = \mathbb{E}[X^p]$ とし，確率測度 Q を

$$Q(A) = \frac{1}{C}\mathbb{E}[1_A X^p], \qquad A \in \mathcal{B}$$

で定義する．つぎに，

$$Z = \frac{Y}{X^{p-1}} 1_{\{X>0\}}$$

とおく．$g(x) = |x|^p$ は凸関数なので，Jensen の不等式を用いれば，

$$\{\mathbb{E}_Q[Z]\}^p \leq \mathbb{E}_Q[Z^p]$$

となる．これより，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C^q}\{\mathbb{E}[XY]\}^q &= \frac{1}{C^q}\left\{\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X^{p-1}}X^p\right]\right\}^q \\
&= \{\mathbb{E}_Q[Z]\}^q \\
&\leq \mathbb{E}_Q[Z^q] \\
&= \frac{1}{C}\mathbb{E}\left[\left\{\frac{Y}{X^{p-1}}\right\}^q X^p\right] \\
&= \frac{1}{C}\mathbb{E}\left[\left\{Y^q \frac{1}{X^{(p-1)q}}\right\}^q X^p\right] \\
&= \frac{1}{C}\mathbb{E}\left[\left\{Y^q \frac{1}{X^p}\right\}^q X^p\right] \\
&= \frac{1}{C}\mathbb{E}[Y^q]
\end{aligned}$$

となる．最後から 2 番目の等号は $1/p + 1/q = 1$ より $(p-1)q = p$ となることよりわかる．よって，

$$\{\mathbb{E}[XY]^q \leq C^{q-1}\mathbb{E}[Y^q]$$

となるので，

$$\mathbb{E}[XY] \leq C^{(q-1)/q}\{\mathbb{E}[Y^q]\}^{1/q}$$

を得る．最後に，$(q-1)/q = 1/p$ に注意すれば，定理は証明される．　□