# ·····A.1·····

## 基本的な確率不等式

**定理 A.1**　非負確率変数 $X \geq 0,\ a.s.$ と正数 $p > 0$ に対して,

$$\mathbb{E}X^p = \int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{P}(X > t)\,dt$$

が成立する.

**証明**　Fubini の定理を用いて変形すれば,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{P}(X > t)\,dt &= \int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{E}1_{(t,\infty)}(X)\,dt = \mathbb{E}\int_0^\infty pt^{p-1}1_{(t,\infty)}(x)\,dt \\ &= \mathbb{E}\int_0^X pt^{p-1}\,dt = \mathbb{E}X^p\end{aligned}$$

から命題は証明される.　□

**例 A.1**　$X$ を非負値離散型確率変数で $x_1, x_2, \ldots,$ 上に値を取り

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i, \qquad x_i > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, \qquad \sum_{i=1}^\infty p_i = 1$$

とする．ただし,

$$\sum_{i=1}^\infty p_i x_i < \infty \tag{1.1}$$

とする．さらに,

$$I_{[x_i,\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq x_i, \\ 0 & \text{（その他）} \end{cases}$$

とおく．このとき，$X$ の分布関数は

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^\infty p_i I_{[x_i,\infty)}(x)$$

となることに注意すれば,

$$\mathbb{P}(X > t) = 1 - \sum_{i=1}^\infty p_i I_{[x_i,\infty)}(x) = \sum_{i=1}^\infty p_i I_{(-\infty,x_i)}(x)$$

となる．したがって，

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,dt = \sum_{i=1}^\infty p_i \int_0^\infty I_{(-\infty,\,x_i)}(t)\,dt$$

となることがわかる．積分記号と和の記号の交換は (1.1) から成立することがわかる．しかし

$$\int_0^\infty I_{(-\infty,\,x_i)}(t) = \lim_{s\uparrow x_i}\int_0^s I_{(-\infty,\,x_i)}(t)\,dt + \lim_{s\downarrow x_i}\int_s^\infty I_{(-\infty,\,x_i)}(t)\,dt = x_i$$

となる．これより

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,dt = \sum_{i=1}^\infty p_i x_i$$

となり，離散型確率変数の期待値と一致することが直接確認できる．

**定理 A.2**　（Markov の不等式）　$X \geq 0$, $a.s.$ とする．任意の $a > 0$ に対して，

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \frac{\mathbb{E}X}{a}$$

が成立する．

**証明**　$X \in [a,\,\infty)$ のとき，$X/a \geq 1$ に注意する：

$$\mathbb{P}\{X \geq a\} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{[a,\,\infty)}(X)] \leq \mathbb{E}[\frac{X}{a}\mathbf{1}_{[a,\,\infty)}(X)] \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}.$$

□

**注意 A.1**　$Y$ を確率変数とする．$X = (Y - \mathbb{E}Y)^2$ とおけば，Chebyshev の不等式

$$\mathbb{P}\{|Y - \mathbb{E}Y| \geq a\} = \mathbb{P}\{(Y - \mathbb{E}Y)^2 \geq a^2\} \leq \frac{\mathbb{VAR}(Y)}{a^2}$$

を得る．

**定理 A.3**　（Jensen の不等式）　$g$ は下に凸 (convex) とし，$X$ と $g(X)$ は可積分とする．このとき，

$$g(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}g(X)$$

が成立する．

**証明**　任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ とある定数 $c$ に対し，$g(x) \geq g(x_0) + c(x - x_0)$ が成立する．$x = X(\omega)$ として，期待値をとれば，$\mathbb{E}g(x) \geq g(x_0) + c(\mathbb{E}X - x_0)$ を得る．さらに，$x_0 = \mathbb{E}X$ とすれば，命題は証明される．□

**定理 A.4**　(Hölder の不等式) $X, Y$ を確率変数で $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty, \mathbb{E}[|Y|^q] < \infty$ をみたすものとする．ただし，$p > 1$ かつ $1/p + 1/q = 1$ である．このとき，

$$|\mathbb{E}[XY]| \le \mathbb{E}[|XY|] \le \{\mathbb{E}[|X|^p]\}^{1/p}\{\mathbb{E}[|Y|^q]\}^{1/q}$$

が成立する．

**証明**　一般性を失わず，$X \ge 0, Y \ge 0$ を仮定してよい．さらに，$\mathbb{E}[X^p] = 0$ ならば，$X = 0, a.s.$ なり，この場合には，Hólder の不等式は明らかに成立するので，$\mathbb{E}[X^p] > 0$ を仮定する．

いま，$C = \mathbb{E}[X^p]$ とし，確率測度 $Q$ を

$$Q(A) = \frac{1}{C}\mathbb{E}[1_A X^p], \qquad A \in \mathcal{B}$$

で定義する．つぎに，

$$Z = \frac{Y}{X^{p-1}} 1_{\{X>0\}}$$

とおく．$g(x) = |x|^p$ は凸関数なので，Jensen の不等式を用いれば，

$$\{\mathbb{E}_Q[Z]\}^p \le \mathbb{E}_Q[Z^p]$$

となる．これより，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C^q}\{\mathbb{E}[XY]\}^q &= \frac{1}{C^q}\left\{\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X^{p-1}}X^p\right]\right\}^q \\
&= \{\mathbb{E}_Q[Z]\}^q \\
&\le \mathbb{E}_Q[Z^q] \\
&= \frac{1}{C}\mathbb{E}\left[\left\{\frac{Y}{X^{p-1}}\right\}^q X^p\right] \\
&= \frac{1}{C}\mathbb{E}\left[\left\{Y^q\frac{1}{X^{(p-1)q}}\right\}^q X^p\right] \\
&= \frac{1}{C}\mathbb{E}\left[\left\{Y^q\frac{1}{X^p}\right\}^q X^p\right] \\
&= \frac{1}{C}\mathbb{E}[Y^q]
\end{aligned}$$

となる．最後から 2 番目の等号は $1/p + 1/q = 1$ より $(p-1)q = p$ となることよりわかる．よって，

$$\{\mathbb{E}[XY]^q \le C^{q-1}\mathbb{E}[Y^q]$$

となるので，

$$\mathbb{E}[XY] \le C^{(q-1)/q}\{\mathbb{E}[Y^q]\}^{1/q}$$

を得る．最後に，$(q-1)/q = 1/p$ に注意すれば，定理は証明される．　□