・・・・・5.2・・・・・

収束のモード

定義 5.1　$\{X_n\}_{n=1}^n$ は確率変数列とし，X を確率変数とする．$n \to \infty$ のとき，$\{X_n\}_{n=1}^n$ が X に分布収束するとは，

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x) = P(X \leq x) = F_X(x)$$

が成立することである．ただし，x は $F_X(x)$ の連続点とする．これを $X_n \xrightarrow{d} X$ または $X_n \xrightarrow{L} X$ と記すことにする．

定義 5.2　$\{X_n\}_{n=1}^n$ は確率変数列とし，X を確率変数とする．$n \to \infty$ のとき，$\{X_n\}_{n=1}^n$ が X に確率収束するとは，任意の $\epsilon\,(\epsilon > 0)$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

が成立することである．これを $X_n \xrightarrow{P} X$ と記すことにする．

定義 5.3　$\{X_n\}_{n=1}^n$ は確率変数列，X を確率変数とする．$n \to \infty$ のとき，$\{X_n\}_{n=1}^n$ が X に概収束するとは，

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$$

が成立することである．これを $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ と記すことにする．

例 5.1　$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立同一に一様分布 $f_X(x) = I_{(0,1)}(x)$ に従うとし，

$$M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

とおく．

まず，$M_n \xrightarrow{P} 1$ を示そう．M_n の累積分布関数は

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = x^n I_{(0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x)$$

となることに注意する．これより，$0 < \epsilon < 1$ に対して，$P(M_n > 1 + \epsilon) = 0$ に注意すれば，$n \to \infty$ のとき

$$P(|M_n - 1| > \epsilon) = P(\epsilon + 1 < M_n \quad \text{または} \quad M_n < 1 - \epsilon) = P(M_n < 1 - \epsilon) = (1-\epsilon)^n \to 0$$

となる．したがって，$M_n \xrightarrow{P} 1$ がわかる．

つぎに，$n(1-M_n)$ の分布収束先を求めよう．$x>0$ に対して，$n\to\infty$ のとき

$$P(n(1-M_n)\le x)=P(M_n\ge 1-x/n)=1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\to 1-e^{-x}$$

となる．$M_n<1$ より，明らかに $x\le 0$ に対しては $P(n(1-M_n)\le x)=0$ となる．したがって，$n(1-M_n)$ は指数分布 $f_X(x)=e^{-x}I_{(0,\infty)}(x)$ に分布収束する．

定理 5.5　$X_n\xrightarrow{P}c$ となるための十分条件は

$$\mathbb{E}(X_n-c)^2\to 0,\qquad (n\to\infty) \tag{5.59}$$

である．

証明　与えられたどんな正の数 $\epsilon>0$ に対しても

$$P(|X_n-c|\ge\epsilon)\le\frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}(X_n-c)^2$$

となり，$n\uparrow\infty$ とすれば，

$$P(|X_n-c|\ge\epsilon)\to 0$$

を得る．□

注意 5.2　(5.61) が成立するとき，X_n は c に**2 次平均収束**するという．

例 5.2　$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ を成功する確率が p の独立な n 回のベルヌーイ試行とし，$S_n=\sum_{i=1}^n\epsilon_i$ とおく．$n\uparrow\infty$ のとき，

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}-p\right)^2=\mathbb{VAR}\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{p(1-p)}{n}\to 0$$

となるので，

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}p$$

となることがわかる．

定理 5.6　$X_1,\ldots,X_n$ は独立同一の分布に従い，その平均と分散は $\mathbb{E}(X_1)=\xi$ と $\mathbb{VAR}(X_1)=\sigma^2<\infty$ で与えられるとする．このとき，

$$\bar{X}_n=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

とおけば，

$$\bar{X}_n\xrightarrow{P}\xi$$

が成立する．

証明　$n\uparrow\infty$ のとき，

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n-\xi)^2=\mathbb{VAR}(\bar{X}_n)=\frac{\sigma^2}{n}\to 0$$

となることから，定理 5.5 を使えば，定理は証明される．□

以下に確率変数列の収束に関する重要な結果を証明なしで述べる．

定理 5.7

(i) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ ならば，$X_n \xrightarrow{P} X$
(ii) $X_n \xrightarrow{P} X$ ならば，$X_n \xrightarrow{d} X$

定理 5.8　$g(x)$ を実数値連続関数とする．このとき，

(i) $X_n \xrightarrow{P} X$ ならば，$g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$
(ii) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ ならば，$g(X_n) \xrightarrow{a.s.} g(X)$
(iii) $X_n \xrightarrow{d} X$ ならば，$g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$

定理 5.9　確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ および定数 c は定数に対して，$X_n \xrightarrow{d} X$ と $Y_n \xrightarrow{P} c$ が成立するとする．このとき，

(i) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$ が成立する．
(ii) $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$ が成立する．

定理 5.10　確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$，数列，確率変数 Z，確率変数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ および定数 c に対して

$$a_n(X_n - c) \xrightarrow{d} Z$$

が成立するとする．このとき，$g(x)$ は $x = c$ で微分 $\dot{g}(c)$ を持つ[1)]ならば，

$$a_n(g(X_n) - g(c)) \xrightarrow{d} \dot{g}(c)Z$$

が成立する．

記号：(i) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とする．

$$\frac{X_n}{\epsilon_n} \xrightarrow{P} 0 \qquad n \to \infty$$

のとき，$X_n = o_P(\epsilon_n)$ と書く．特に，$X_n \xrightarrow{P} 0$ のとき，

$$X_n = o_P(1)$$

と記す．
(ii) どんな $\delta > 0$ に対してもある $M = M(\delta) > 0$ と正数 $n_0 = n_0(\delta) > 0$ が存在して，どんな $n > n_0$ に対しても

$$P(|X_n| \leq M|\epsilon_n|) \geq 1 - \delta$$

---

1) $g(x)$ が $x = c$ で連続微分可能でなくともこの定理　　　は成立することに注意する．

が成立するとき，

$$X_n = O_P(\epsilon_n)$$

と書く．特に，$P(|X_n| \le M) \ge 1-\delta$ ならば，$X_n = O_P(1)$ と書く．
(iii) どんな $\delta > 0$ に対しても，ある $0 < m(\delta) = m < M(\delta) = M < \infty$ と $n_0 = n_0(\delta)$ が存在し，どんな $n > n_0$ に対しても

$$P\left(m < \left|\frac{X_n}{\epsilon_n}\right| < M\right) \ge 1-\delta$$

が成立するとき，$X_n \asymp_P \epsilon_n$ （同じオーダー）と記す．
o_P と O_P の性質をまとめる：
(i) $X_n = o_P(\epsilon_n)$ かつ $Y_n = o_P(\epsilon_n)$ ならば，$X_n \pm Y_n = o_P(\epsilon_n)$ である．
(ii) $X_n = o_P(\epsilon_n)$ かつ $Y_n = O_P(\delta_n)$ ならば，$X_nY_n = o_P(\delta_n\epsilon_n)$ である．
(iii) 特に，

$$\begin{aligned}
o_P(1) + o_P(1) &= o_P(1) \\
o_P(1) + O_P(1) &= O_P(1) \\
O_P(1)o_P(1) &= o_P(1) \\
(1+o_P(1))^{-1} &= O_P(1) \\
o_P(\epsilon_n) &= \epsilon_n o_P(1) \\
o_P(1)(O_P(1)) &= o_P(1)
\end{aligned}$$

である．