

# 確率統計と情報処理・演習 ( 2007 年度後期 )

## 確率分布

2007 年 11 月 30 日

日本女子大学理学部数物科学科

今野 良彦

October 5, 2007

## 今日の講義の目的と概要

- 標本分布
  - 標本分布とは(先週説明)
  - 正規母集団からの標本に関連した標本分布
    - \*  $\chi^2$  分布(カイ自乗分布)(先週説明)
    - \*  $t$  分布と  $F$  分布

## $t$ 分布

$m$  を自然数とする．確率変数  $T$  が自由度  $m$  の  $t$  分布に従うとは,  $T$  の確率密度関数が

$$f_m(x) = \frac{\Gamma((m+1)/2)}{\sqrt{m\pi}\Gamma(m/2)} \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-(m+1)/2}, \quad -\infty < x < \infty$$

で与えられるときをいう．

ただし,  $\Gamma(a)$  ( $a > 0$ ) はガンマ関数で

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

とくに,

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(a+1) &= a\Gamma(a), \\ \Gamma(n) &= (n-1)! \quad (n \text{ は自然数})\end{aligned}$$

$t$  分布のグラフの出力

```
> # 自由度 10 の t 分布の確率密度関数
> tdens10<-function(x){
+ dt(x,10)
+ }
>
> # 自由度 10 の t 分布の確率密度関数のグラフの出力
> curve(tdens10,-4,4)
>
> # 自由度 2 の t 分布
> tdens2<-function(x){
+ dt(x,2)
+ }
>
>
>
> curve(tdens10,-6,6)
> # 自由度 2 の t 分布の確率密度関数のグラフの出力を追加
> curve(tdens2,-6,6,col=2,add=T)
> # 標準正規分布の確率密度関数のグラフの出力の追加
> curve(dnorm,-6,6,col=3,add=T)
>
```

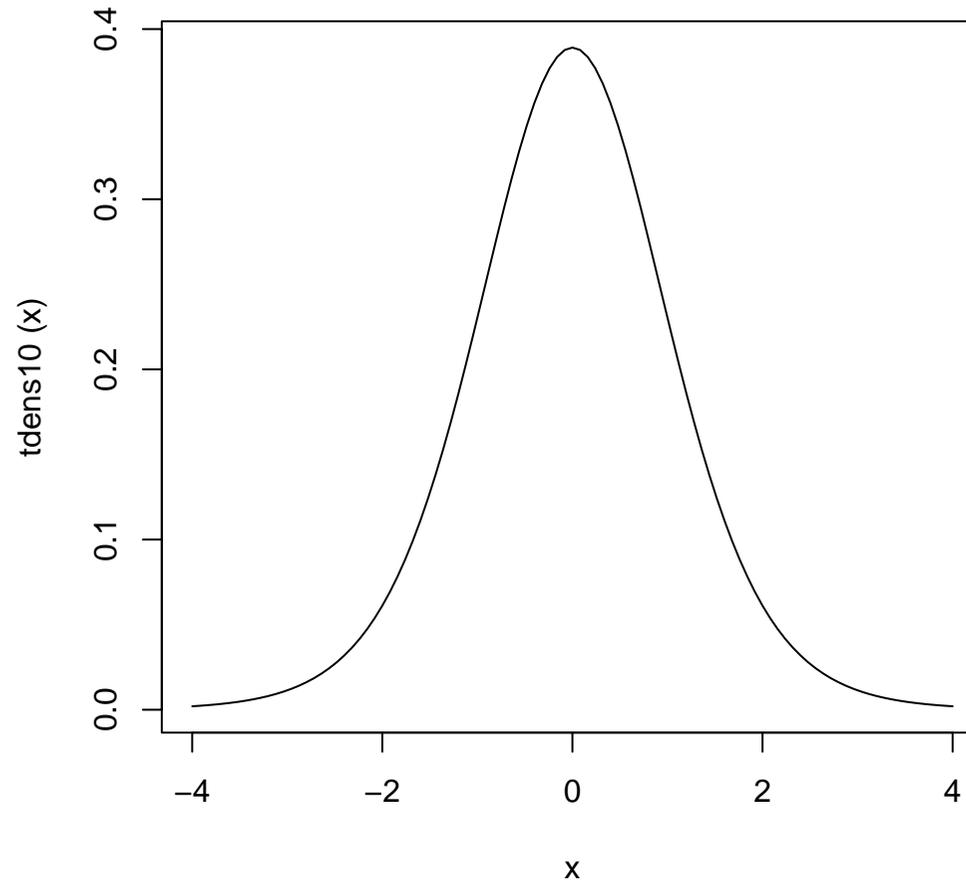


Figure 1: 自由度 10 のと t 分布の確率密度関数のグラフ

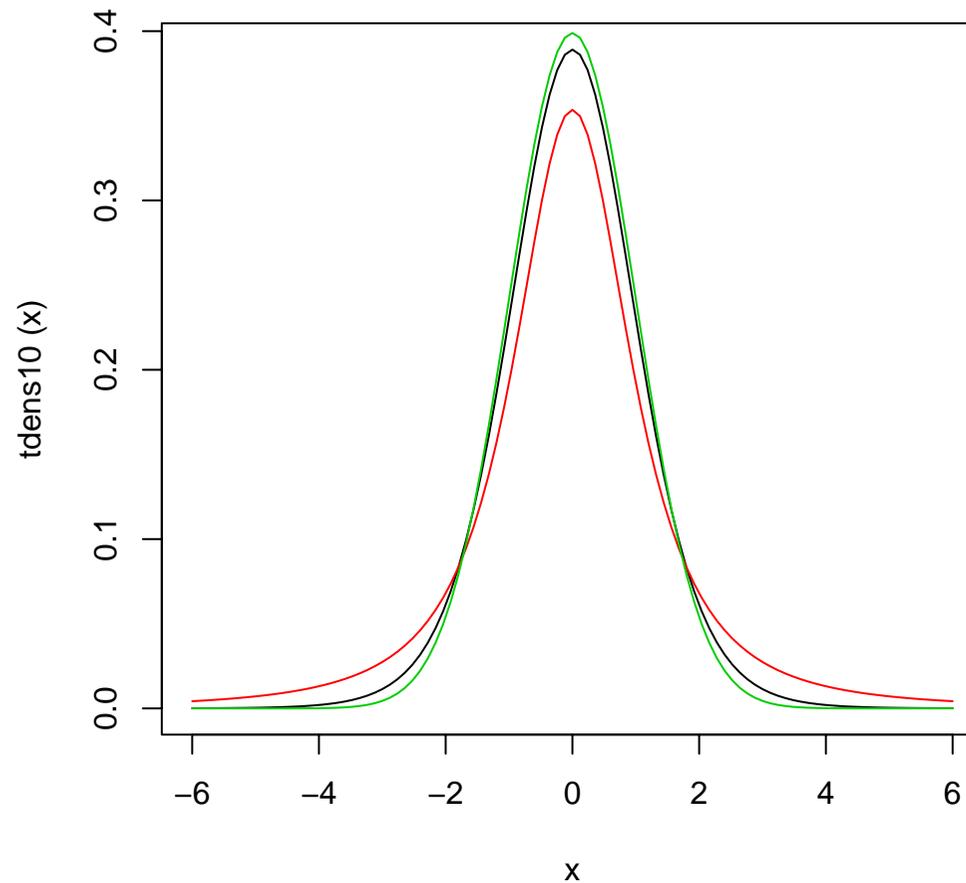


Figure 2: 自由度 10 の t 分布 (black) , 自由度 2 の t 分布 (red) と標準正規分布 ( green ) の確率密度関数のグラフ

## $t$ 分布の確率密度関数の導出

★  $X$  を標準正規分布に従う確率変数, すわわち,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

★  $Y$  を自由度  $m$  の  $\chi^2$  に従う確率変数, すなわち

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-y/2} & (y > 0), \\ 0 & (y \leq 0). \end{cases}$$

★  $X$  と  $Y$  は独立

このとき,

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Y/m}}$$

は自由度  $m$  の  $t$  分布に従う.

このことを示すために, 任意の  $-\infty < a_1 < a_2 < \infty$  と  $0 < b_1 < b_2 < \infty$  に対して,

$$\mathbb{P}(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

を満たす非負の関数  $f_{X,Y}$  を求める. これを  $X$  と  $Y$  の同時確率密度関数という.

$-\infty < x < \infty, y > 0$  に対して,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) &= \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \int_0^y \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} v^{\frac{m}{2}-1} e^{-v/2} dv\end{aligned}$$

となるので, 微積分の基本定理を用いると

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-y/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} e^{-x^2/2} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-y/2}\end{aligned}$$

任意の  $z$  に対して,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \leq z) &= \int \int_{(x/\sqrt{y/m}) \leq z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2} \Gamma(m/2)} e^{-x^2/2} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-y/2} dx dy \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^{\sqrt{y/m}z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2} \Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-(x^2+y)/2} dx \right\} dy\end{aligned}$$

$w = \sqrt{y/m}z$  とおき, この両辺を  $z$  で部分する. 積分記号と微分記号を入れ替

えを行う.

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= \frac{d}{dz} \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^{\sqrt{y/m}z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-(x^2+y)/2} dx \right\} dy \\
 &= \int_0^\infty \frac{d}{dz} \left\{ \int_{-\infty}^{\sqrt{y/m}z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-(x^2+y)/2} dx \right\} dy \\
 &= \int_0^\infty \frac{dw}{dz} \frac{d}{dw} \left\{ \int_{-\infty}^w \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-(x^2+y)/2} dx \right\} dy \\
 &= \int_0^\infty \sqrt{\frac{y}{m}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-(w^2+y)/2} dy \\
 &= \int_0^\infty \sqrt{\frac{y}{m}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-(w^2+y)/2} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)} \frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^\infty \frac{1}{2^{(m+1)/2}} y^{(m-1)/2} \exp\left[-\frac{(1+z^2/m)y}{2}\right] dy \quad 11
 \end{aligned}$$

Insert 2006-11-17.pdf

ここで

$$u = \frac{(1 + z^2/m)y}{2}, \quad du = \frac{(1 + z^2/m)}{2} dy$$

から

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)} \frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^\infty \frac{1}{2^{(m+1)/2}} \left( u / \frac{(1 + z^2/m)}{2} \right)^{(m-1)/2} \\ &\quad \times e^{-u} / \frac{(1 + z^2/m)}{2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)} \frac{1}{\sqrt{m}} (1 + z^2/m)^{-(m+1)/2} \int_0^\infty u^{(m+1)/2-1} e^{-u} du \\ &= \frac{\Gamma((m+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)} \frac{1}{\sqrt{m}} \left( 1 + \frac{z^2}{m} \right)^{-(m+1)/2} \end{aligned}$$

## $t$ 分布のシミュレーション

**目的** 1000 個の標準正規乱数と自由度  $m$  の  $\chi^2$  分布乱数を生成して, 自由度  $m$  の  $t$  分布乱数を 1000 個作成して, その分布が  $t$  分布の確率密度関数に近いことを確認する.

$chi^2$  分布のグラフの出力

```
> # 標準正規乱数 1000 個の生成
> nrdata<-rnorm(1000,0,1)
> # 自由度 2 のカイ自乗分布乱数 1000 個の生成
> chisqdata2<-rchisq(1000,2)
>   カイ自乗分布乱数 1000 個の平均
> mean(chisqdata2)
[1] 2.005096
>   カイ自乗分布乱数 1000 個の標準偏差
> sd(chisqdata2)
[1] 2.028897
> # >   カイ自乗分布乱数 1000 個のヒストグラムの作成
> hist(chisqdata2,freq="F")
> # 自由度 2 のカイ自乗分布の確率密度関数のグラフを上書き
> chisq2<-function(x){dchisq(x,2)}
> curve(chisq2,0,15,add=T)
>
```

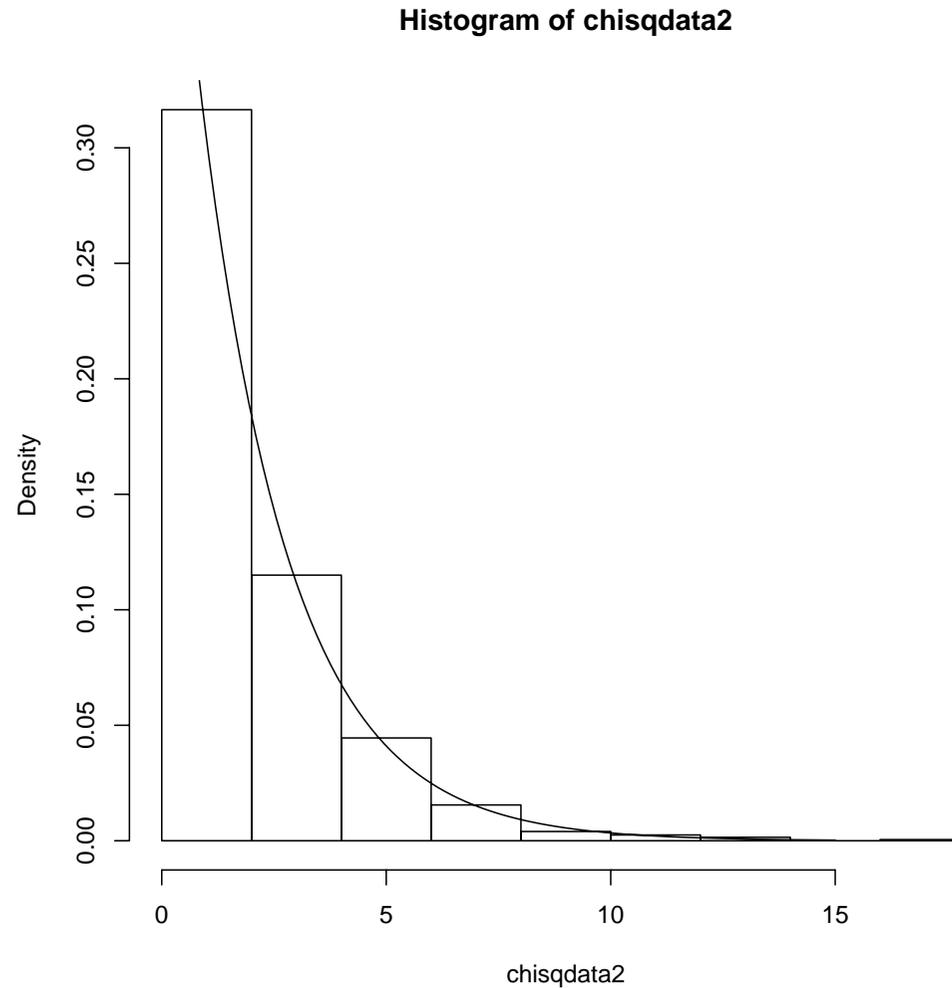


Figure 3: カイ自乗分布乱数 1000 個のヒストグラムと自由度 2 のカイ自乗分布の確率密度関数のグラフ <sup>16</sup>

$t$  分布乱数のグラフの出力

```
> nrdata<-rnorm(5000,0,1)
> chisqdata<-rchisq(5000,6)
> # t 乱数の作成
> t6data<-nrdata/(sqrt(chisqdata/6))
>
> # 自由度 6 の t 乱数 5000 個のヒストグラム
> hist(t6data,freq=F,ylim=c(0,0.4))
> # 自由度 6 の t の確率密度関数の上書き
> t6<-function(x){dt(x,6)}
> curve(t6,-10,10,add=T,col=2)
>
```

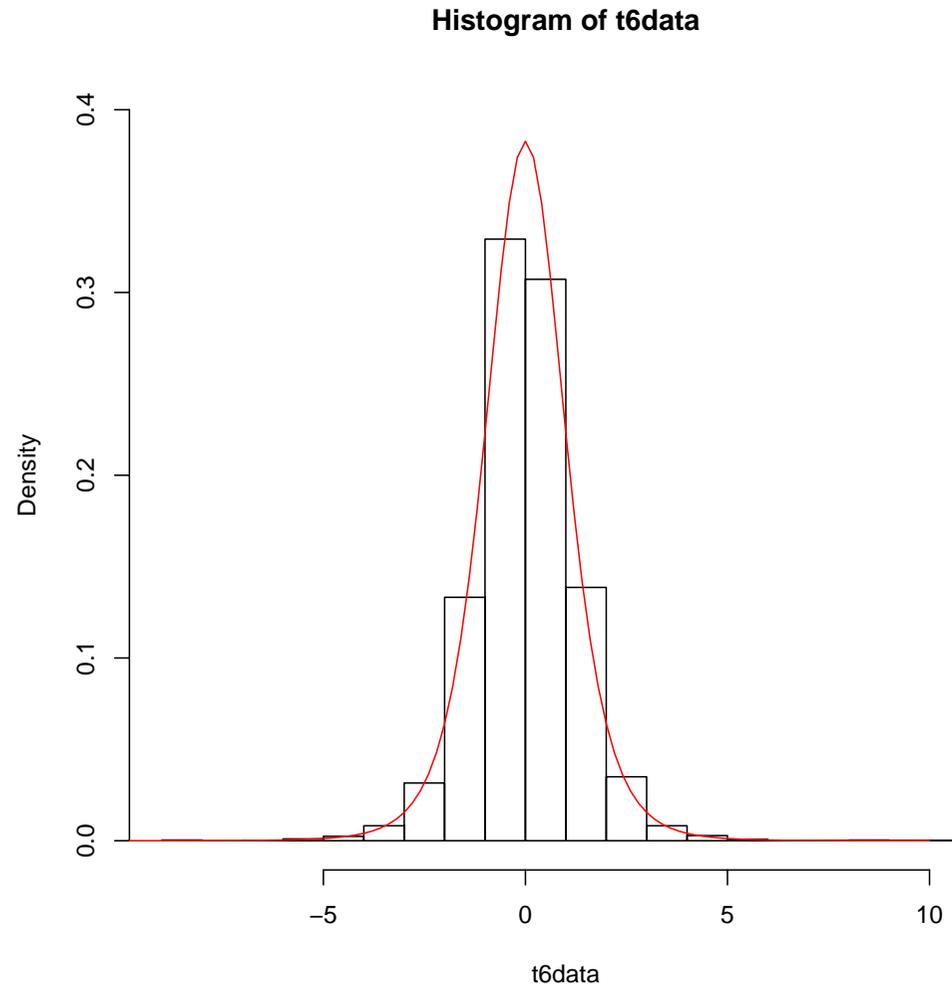


Figure 4:  $t$  分布乱数 5000 個のヒストグラムと自由度 2 のカイ自乗分布の確率密度関数のグラフ

## 正規分布と $t$ 分布の関係

$t$  分布が使われるのは正規分布から標本の場合である。すなわち,

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$$

ただし,  $n \geq 2$ ,  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $0 < \sigma < \infty$  である。すなわち,

★  $X_1, X_2, \dots, X_n$  は互いに独立  $-\infty < a_{i1} < a_{i2} < \infty$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) に対して,

$$\mathbb{P}(a_{11} < X_1 \leq a_{12}, a_{21} < X_2 \leq a_{22}, \dots, a_{n1} < X_n \leq a_{n2}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(a_{i1} < X_i \leq a_{i2})$$

$$\mathbb{P}(a_{i1} < X_i \leq a_{i2}) = \int_{a_{i1}}^{a_{i2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$$

★

$$\star \text{ 標本平均 } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\star \text{ 標本分散 } S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

このとき,

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$$

すわわち,  $-\infty < a < b < \infty$  に対して,

$$\mathbb{P}(a < Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

さらに ,

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma} \right)^2$$

は自由度  $n-1$  の  $\chi^2$  分布に従う .

★  $0 < a < b < \infty$  に対して ,

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{2^{(n-1)/2} \Gamma((n-1)/2)} y^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-y/2} dy$$

ただし ,  $\Gamma(a)$  ( $a > 0$ ) はガンマ関数で

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

★  $\bar{X}_n$  と  $S_n^2$  は独立である．すわわち， $-\infty < a < b < \infty$ ,  $0 < c < d < \infty$  に対して，

$$\mathbb{P}(a < \bar{X}_n \leq b, c < S_n^2 \leq d) = \mathbb{P}(a < \bar{X}_n \leq b)\mathbb{P}(c < S_n^2 \leq d)$$

このことに注意して，

$$T = \frac{(\bar{X}_n - \mu) / \sqrt{\sigma^2/n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right)^2 / (n-1)}}$$

とおく．

$U$	標準正規分布	$V$	自由度 $m$ の $\chi^2$ 分布
$U$ と $V$ は独立			
$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	標準正規分布	$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right)^2$	自由度 $n - 1$ の $\chi^2$ 分布
$Z_n$ と $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right)^2$ は独立			

このとき,

$$T = \frac{U}{\sqrt{V/m}} \iff T = \frac{Z_n}{\sqrt{(n-1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right)^2 / (n-1)}}$$

は自由度  $m$  の  $t$  分布に従う.

$$T = \frac{Z_n}{\sqrt{(n-1) \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma} \right)^2 / (n-1)}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2/n}}$$

は自由度  $n-1$  の  $t$  分布に従う。すなわち,  $-\infty < a < b < \infty$  に対して,

$$\mathbb{P} \left( a < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2/n}} \leq b \right) = \int_a^b \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma((n-1)/2)} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left( 1 + \frac{t^2}{n-1} \right)^{-n/2} dt$$

ただし,

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma} \right)^2, \quad \Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \quad a > 0$$

## $T = (\bar{X}_n - \mu) / \sqrt{S_n^2/n}$ の分布をシミュレーションで確かめるアルゴリズム

- (1) 平均が  $\mu$  ( $\mu = 0$  でなくともよい) の正規乱数を  $n$  個発生される。  
 $x_1, x_2, \dots, x_n$  とする。
- (2) このデータの標本平均の実現値を  $\bar{x}_n$  , 標本標準偏差の実現値を

$$u_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}$$

- (3)  $T$  の実現値

$$t = \frac{\bar{x}_n - \mu}{u_n / \sqrt{n}}$$

- (4) (1) ~ (3) を 1000 回繰り返して  $T$  の実現値を 1000 個計算する。

$t$  の値を計算する関数

```
> tcalc<-function(x,y){  
+ barx<-mean(x)  
+ sdx<-sd(x)  
+ tval<-(barx-y)/(sdx/sqrt(length(x)))  
+ return(tval)  
+ }
```

1000 個の  $t$  の値を計算し , グラフに出力

```
> samt<-rep(0,1000) # ベクトル samt の成分は $0$  
> for (i in 1:1000){ # 繰り返しのプログラム  
+ samt[i]<-tcalc(rnorm(10,2,4),2) # samt の $i$ 番 目  
に t の値を入れる .  
+ }  
> hist(samt,nclass=20,freq=F)  
> tdens9<-function(x)(dt(x,9)) # 自由度 $9$ の $t$ 分布の  
密度関数  
> curve(tdens9,-4,4,col=2,add=T)  
>
```

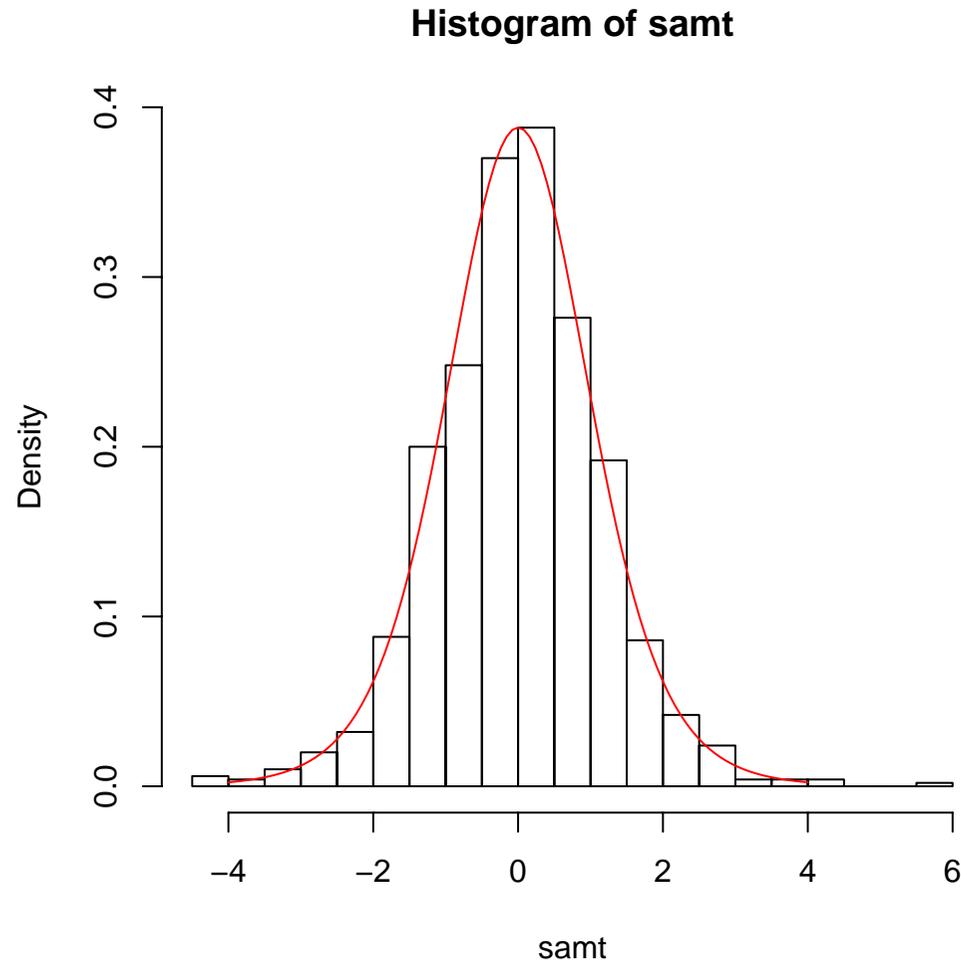


Figure 5:  $t$  分布乱数 1000 個のヒストグラムと自由度 9 の  $t$  分布の確率密度関数のグラフ

## ここまでのまとめ

- $t$  分布の確率密度関数の形はわかりました？
- $t$  分布は独立な標準正規分布と  $\chi^2$  分布から導出されることはわかりましたか？
- 正規分布と  $t$  分布の関係はわかりましたか？

## 問題 1

- (1) 適当な自由度が  $t$  の確率密度関数と標準正規分布の確率密度関数のグラフを書け (meriro-hanaka-071207-t1.pdf)
- (2) 1000 個の標準分布の乱数と自由度  $m$  の  $\chi^2$  分布の乱数を 1000 個つくり 1000 個の  $t$  分布乱数を作成し, そのグラムと自由度  $m$  の  $t$  の分布の確率密度関数を書き入れたものを作成せよ. ただし, 自由度は誕生日プラス 3 とする (meriro-hanaka-071207-t2.pdf)
- (3) (1) 平均が  $\mu$  の正規乱数を  $n$  個発生される.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  とする.

(2) このデータの標本平均の実現値を  $\bar{x}_n$  , 標本標準偏差の実現値を

(3)  $T$  の実現値

$$u_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}$$
$$t = \frac{\bar{x}_n - \mu}{u_n / \sqrt{n}}$$

(4) (1) ~ (3) を 1000 回繰り返して  $T$  の実現値を 1000 個計算する .

のアルゴリズムに基づいて  $t$  分布の乱数を作成し , 1000 個の  $t$  分布の乱数のヒストグラムと対応する自由度の  $t$  分布の確率密度関数のグラフを書け . (meriro-hanaka-071207-t3.pdf) ただし , 標本数  $n$  は 16-(誕生日) とする .

- それぞれの問題の解説を mejiro-hanako-071214.txt に書け .
- 締め切りは 2007 年 12 月 14 日 ( 金 ) 13 時

## $F$ 分布の確率密度関数

$m, n$  は正の整数とする．自由度  $(m, n)$  の  $F$  分布の確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_{(m, n)}(x) &= \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/2-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-(m+n)/2}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/2-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-(m+n)/2} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) &= \begin{cases} 1 & x \in (0, \infty) \\ 0 & x \notin (0, \infty) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0), \end{cases} \end{aligned}$$

## 自由度 (1, 10), (2, 10), (3, 10), (8, 10), (8, 20) の $F$ の分布の確率密度関数の グラフの作図

### $F$ のグラフの出力

```
> fdens1.10<-function(x) (df(x,1,10))
> fdens2.10<-function(x) (df(x,2,10))
> fdens3.10<-function(x) (df(x,3,10))
> fdens8.10<-function(x) (df(x,8,10))
> fdens8.20<-function(x) (df(x,8,20))
> curve(fdens1.10,0.1,5,ylim=c(0,1.5))
> curve(fdens2.10,0.00000001,5,col=2,add=T)
> curve(fdens3.10,0,5,col=3,add=T)
> curve(fdens8.10,0,5,col=4,add=T)
> curve(fdens8.20,0,5,col=5,add=T)
```

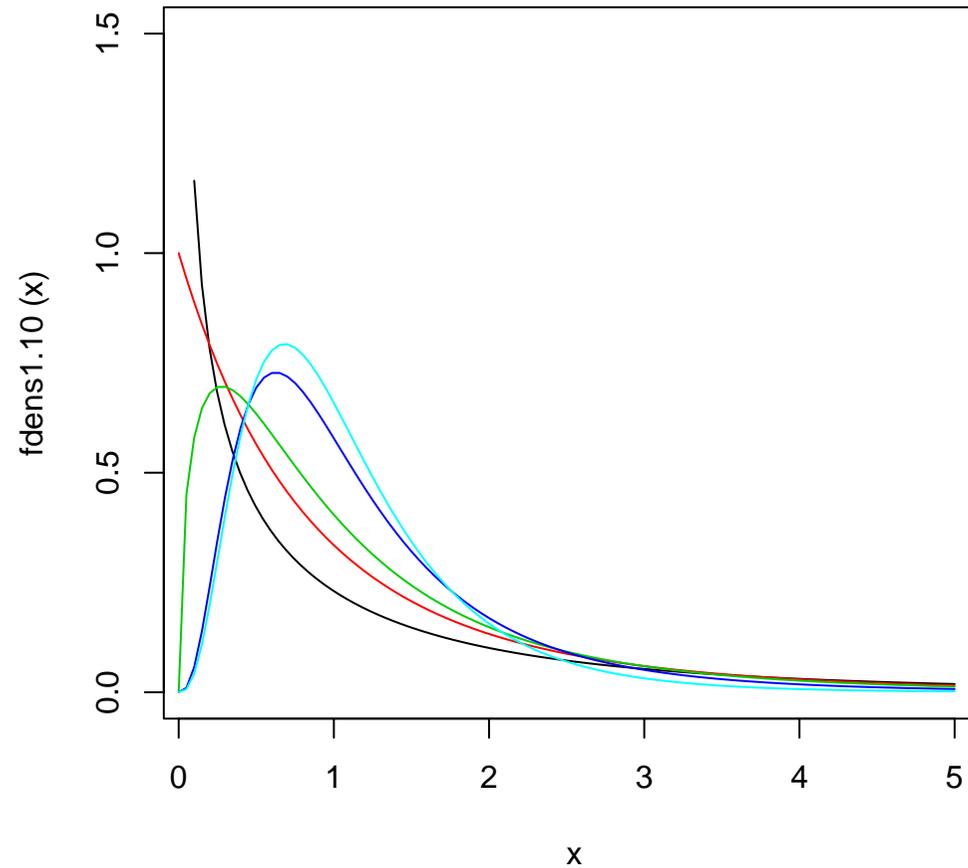


Figure 6: 自由度  $(1, 10)$ ,  $(2, 10)$ ,  $(3, 10)$ ,  $(8, 10)$ ,  $(8, 20)$  の  $F$  の分布の確率密度関数のグラフ

$X$  が自由度  $m$  の  $\chi^2$  分布に従い,  $Y$  が自由度  $n$  の  $\chi^2$  分布に従い, 独立であれば,

$$Z = \frac{X/m}{Y/n}$$

は自由度  $(m, n)$  の  $F$  分布に従う.

$X$  の確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x/2} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0). \end{cases} \\ &= \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x/2} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) \end{aligned}$$

同様に,  $Y$  の確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2} & (y > 0), \\ 0 & (y \leq 0). \end{cases} \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y) \end{aligned}$$

ただし,  $a > 0$  に対して,

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

$X$  と  $Y$  が独立であることから, 任意の  $0 < a_1 < a_2 < \infty$ ,  $0 < b_1 < b_2 < \infty$  に対して,

$$\mathbb{P}(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f_X(x) f_Y(y) dx dy$$

もっと一般的に  $D \subset (0, \infty) \times (0, \infty)$  としてとき,

$$\mathbb{P}((X, Y) \in D) = \int \int_D f_X(x) f_Y(y) dx dy$$

が成立する.

このことに注意して,  $Z$  と分布関数を求めるために, 任意の正の実数  $z$  に対して,

$$D = \left\{ (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) : \frac{x/m}{y/n} \leq z \right\}$$

$z > 0$  に対して,  $X$  と  $Y$  は正值確率変数なので,

$$G_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\left(\frac{X/m}{Y/n} \leq z\right) = 0$$

また, 任意の正の実数  $z$  に対して,

$$\begin{aligned} G_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\left(\frac{X/m}{Y/n} \leq z\right) \\ &= \int \int_D f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^{\frac{m}{n}yz} f_X(x) dx \right) f_Y(y) dy \end{aligned}$$

両辺を  $z$  で微分(積分記号と微分記号の交換可能を仮定)する： $z > 0$  に対して，

$$\begin{aligned}
 g_Z(z) &= \frac{d}{dz} G_Z(z) \\
 &= \int_0^\infty \frac{d}{dz} \left( \int_0^{\frac{m}{n}yz} f_X(x) dx \right) f_Y(y) dy \\
 &= \int_0^\infty f_X\left(\frac{m}{n}yz\right) \frac{m}{n}y f_Y(y) dy \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} \left(\frac{m}{n}yz\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\frac{m}{n}yz} \frac{m}{n}y \\
 &\quad \times \mathbb{1}_{(0, \infty)}\left(\frac{m}{n}yz\right) \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y) dy
 \end{aligned}$$

$$z \leq 0 \text{ に対して, } g_Z(z) = \frac{d}{dz} G_Z(z) = 0$$

$z > 0$  のとき, これを整理すると

$$\begin{aligned}
 g_Z(z) &= \int_0^\infty \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} \left(\frac{m}{n}yz\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\frac{m}{n}yz} \frac{m}{n}y \\
 &\quad \times \mathbb{1}_{(0,\infty)}\left(\frac{m}{n}yz\right) \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) dy \\
 &= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} z^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}} \int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}\left(1+\frac{m}{n}x\right)} y^{(m+n)/2-1} dy
 \end{aligned}$$

あとはつぎの積分を評価すればよい:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}\left(1+\frac{m}{n}x\right)} y^{(m+n)/2-1} dy$$

そのために

$$v = \frac{y}{2} \left( 1 + \frac{m}{n} z \right)$$

と置換すると

$$y \Big|_0^\infty = \frac{2v}{1 + \frac{m}{n} z} \Big|_0^\infty, \quad dy = \frac{2}{1 + \frac{m}{n} z} dv$$

から

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\frac{y}{2} \left( 1 + \frac{m}{n} z \right)} y^{(m+n)/2-1} dy &= \int_0^\infty e^{-v} \frac{2^{(m+n)/2-1} v^{(m+n)/2-1}}{\left( 1 + \frac{m}{n} z \right)^{(m+n)/2-1}} \frac{2}{1 + \frac{m}{n} z} dv \\ &= 2^{(m+n)/2-1} \left( 1 + \frac{m}{n} z \right)^{-(m+n)/2} \int_0^\infty e^{-v} v^{(m+n)/2-1} dv \\ &= 2^{(m+n)/2-1} \left( 1 + \frac{m}{n} z \right)^{-(m+n)/2} \Gamma \left( \frac{m+n}{2} \right) \end{aligned}$$

これより,  $z > 0$  のとき,

$$\begin{aligned}
 g_Z(z) &= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} z^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}} \int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}\left(1+\frac{m}{n}z\right)} y^{(m+n)/2-1} dy \\
 &= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} z^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}} 2^{(m+n)/2-1} \left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-(m+n)/2} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} z^{m/2-1} \left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-(m+n)/2}
 \end{aligned}$$

したがって,

$$g_Z(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} z^{m/2-1} \left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-(m+n)/2} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(z)$$

独立な1000個の  $\chi^2$  から  $F$  分布の値を1000個作成するプログラム

```
> c8rand<-rchisq(1000,8)      # 自由度8のカイ自乗分布乱数
を1000個生成
> c10rand<-rchisq(1000,10)    # 自由度10のカイ自乗分布乱数
を1000個生成
> fprop<-(c8rand/8)/(c10rand/10) # 自由度10のF分布乱
数を1000個生成
> hist(fprop)
> hist(fprop)$count
 [1] 501 342 100  35  13   4   2   1   1   1
> hist(fprop,nclass=20,freq=F,ylim=c(0,0.8))
> fdens8.10<-function(x)(df(x,8,10)) # 自由
度(8,10)のF分布確率密度関数を設定
> curve(fdens8.10,0,5,col=4,add=T) # 密度関数をヒストグラ
ムに上書き
```

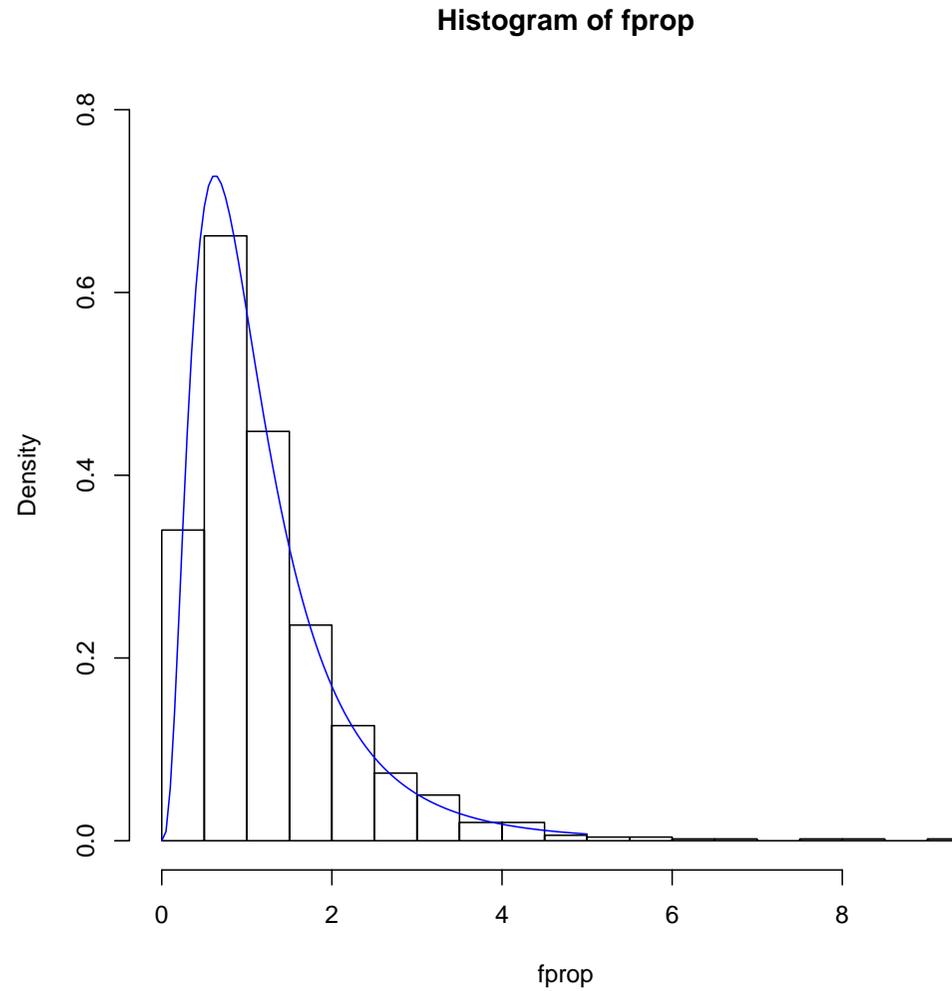


Figure 7: 自由度 (8, 10) の  $F$  分布乱数とその確率密度関数のグラフ

独立な1000個の $\chi^2$ からF分布の値を1000個作成するプログラム

```
> c5rand<-rchisq(1000,5)
> c8rand<-rchisq(1000,8)
> fdens5.8<-function(x)(df(x,5,8))
> fprop<-(c8rand/5)/(c10rand/8)
> hist(fprop)$count
[1] 396 359 150 59 21 7 1 3 0 1 1 1 1
>
> hist(fprop,nclass=20,freq=F,ylim=c(0,0.7))
> curve(fdens5.8,0,10,col=2,add=T)
>
```

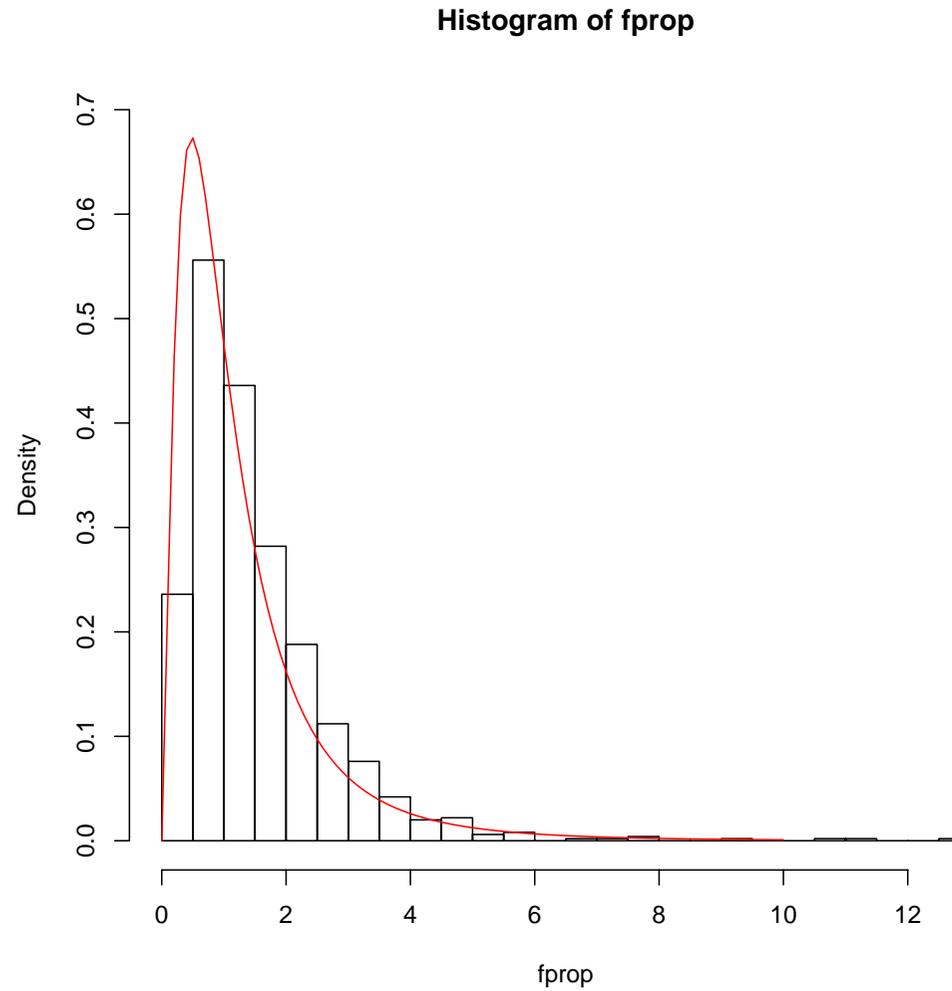


Figure 8: 自由度 (5, 8) の  $F$  分布乱数とその確率密度関数のグラフ

## ここまでのまとめ

- $F$  分布の確率密度関数の形はわかりました？
- $F$  分布は独立なふたつの  $\chi^2$  分布から導出されることはわかりましたか？

## 問題 2

- (1) 適当な自由度が  $F$  の確率密度関数のグラフを 5 つ書け。(meriro-hanaka-071207-F1.pdf) 色を変えてグラフを書き, 各色のグラフに対応する自由度を mejiro-hanako-071207.txt に書け.
- (2) 1 自由度  $m$  と  $n$  の  $\chi^2$  分布の乱数を 1000 個つくり 1000 個の  $F$  分布乱数を作成し, そのグラムと自由度  $(m, n)$  の  $F$  の分布の確率密度関数を書き入れたものを作成せよ. ただし, 自由度は  $m$  と  $n$  は適当なもの (例にないもの) を選択せよ (meriro-hanaka-021207-F2.pdf)
  - それぞれの問題の解説を mejiro-hanako-071207.txt に書け.
  - 締め切りは 2007 年 12 月 07 日 (金) 13 時