確率統計と情報処理・演習（2006 年度後期）

確率分布

2006 年 10 月 27 日

日本女子大学理学部数物科学科　　今野 良彦

November 10, 2006

今日の講義の目的と概要

- 確率の定義と確率分布
- 確率変数とその特性量
  - 累積分布関数
  - 確率関数と確率密度関数
- いくつかの重要な確率分布
  - 離散型分布
    - 二項分布・ポアソン分布
  - 連続型分布
    - 正規分布・指数分布・一様分布

確率事象

- 試行：硬貨投げのようにその結果不確実な現象の観察や実験
- 標本点：試行によって起こりえる結果．これを ω と書く[1].
- 標本空間：標本点全体からなる集合．これを Ωと書く[2] .
- 事象：いくつかの標本点からなる集合．標本空間 Ω も事象の例．$\omega \in \Omega$ なので，Ω は必ず起こる事象であり，全事象ともいう．
- 事象 A の補事象 A^c ：A に含まれない標本点すべての集合．全事象 Ω の補事象を空事象とよび，$\emptyset$ と書く．

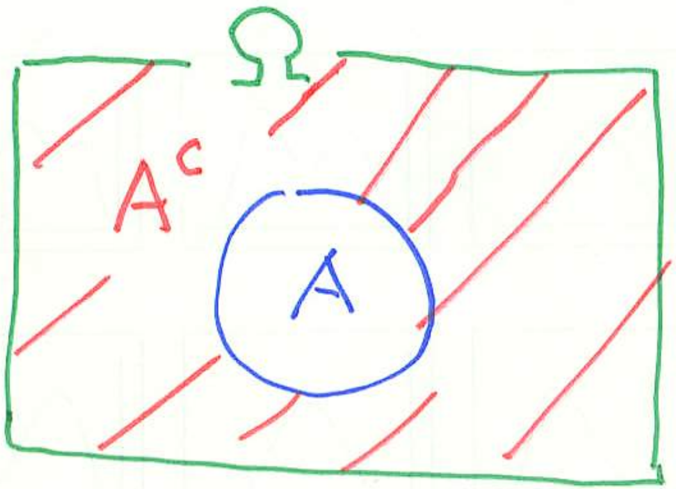
[1]「オメガ」と読む

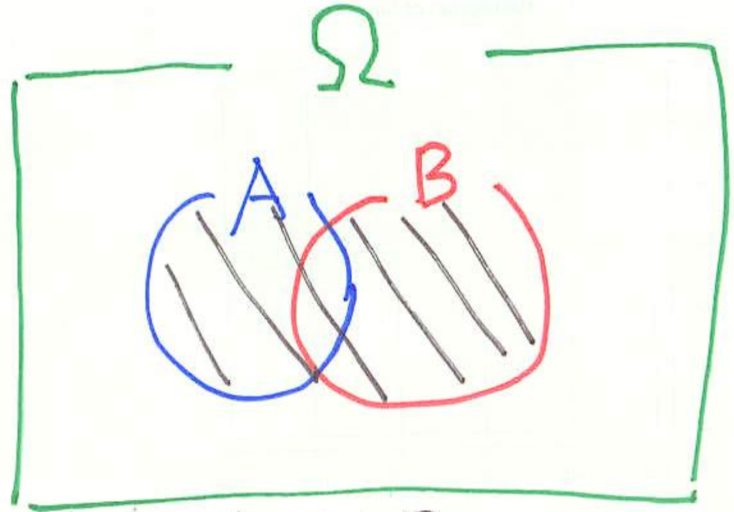
[2]「オメガ」と読む．ω の大文字．

- 事象 A と B の共通（積）事象 $A \cap B$ ：A と B の<u>両方に共通</u>に含まれる標本点の集合.

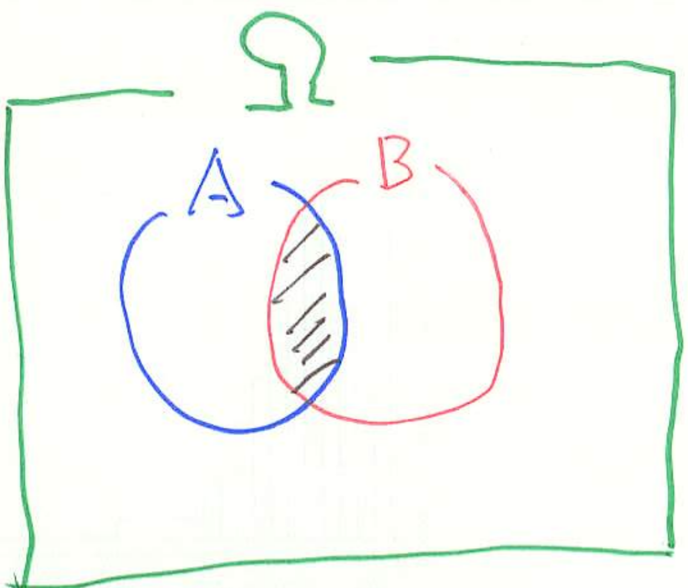
  特に，$A \cap B = \emptyset$ のとき，事象 A と B は互いに排反であるという.

- 事象 A と B の和事象 $A \cup B$ ：A と B のうち<u>少なくともとも一方</u>に含まれる標本点の集合.

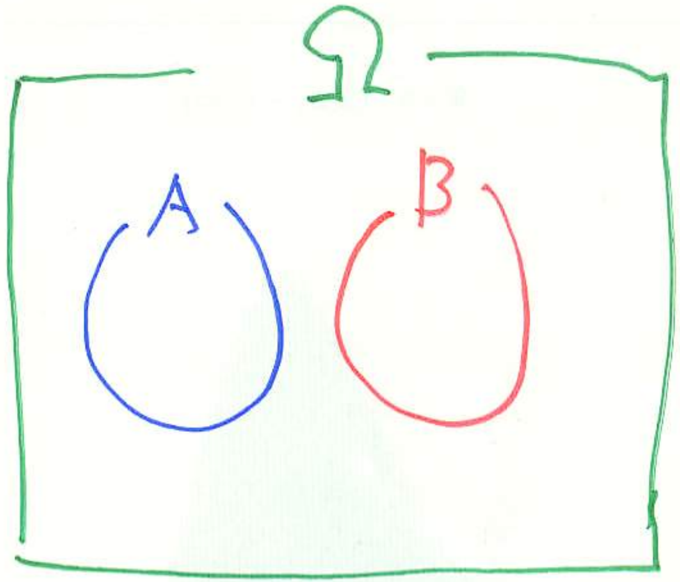




$A \cup B$



$A \cap B$



AとB は互いに排反

確率の定義

事象 A の関数 $\mathbb{P}(\cdot)$ で，つぎの条件をみたすものを考える[3]：

P1 すべての事象 A に対して，$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

P2 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

P3 事象 A と B が互いに排反のとき，$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ が成立[4].

このとき，関数 $\mathbb{P}(\cdot)$ を標本空間 Ω 上の**確率分布**といい，$\mathbb{P}(A)$ を事象 A の**確率**とよぶ[5]．$(\Omega, \mathbb{P})$ のことを**確率モデル**という.

[3] $\mathbb{P}$ を教科書では Pr と書いている.

[4] P3 のことを有限加法性というが，本来は完全加法性で確率は定義される：すなわち，事象列 A_1，A_2，$\ldots$ が互いに排反のとき，$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

[5] 事象 A の起こる確率ということ.

確率の性質

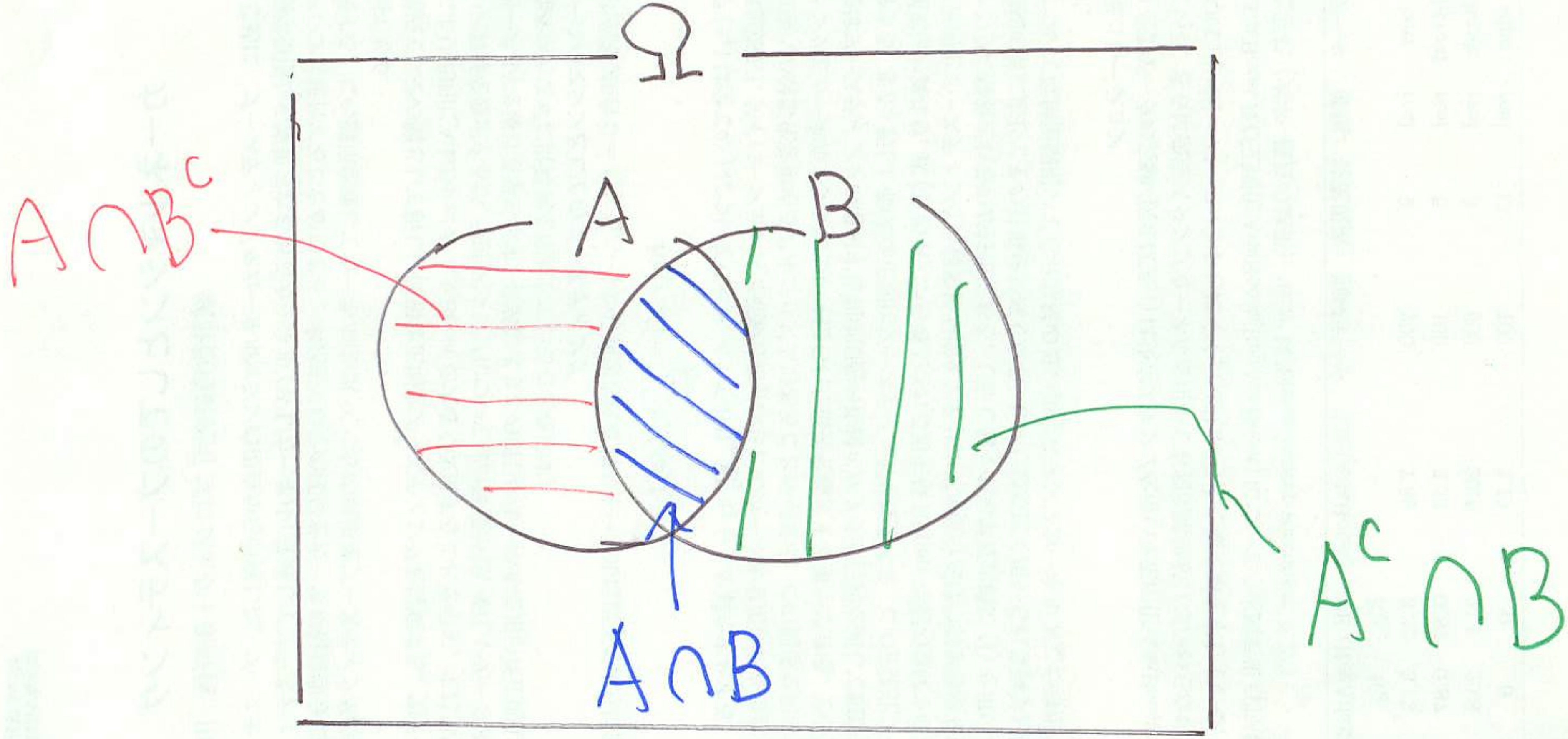
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

  なぜならば，補事象の定義から $A \cap A^c = \emptyset$ となるので，A と A^c は互いに排反．さらに，$A \cup A^c = \Omega$ より

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(\Omega) && \text{（確率の性質 P2 より）} \\ &= \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) && \text{（確率の性質 P3 より）} \end{aligned}$$

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

  $A \cap B^c$, $A \cap B$, $A^c \cap B$ は互いに排反で，$(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = A \cup B$ に注意して，P3 を用いればよい．



Ω
A
B
A∩B^c
A∩B
A^c∩B

確率変数の定義

$\boxed{\text{例}}$ 「2 人の子供がいる家庭について，子供の男女の性別を調べる」という試行を考える．女児を g，男児を b で表す．たとえば，生まれた順が，女，男ならば，gb と書く．標本空間は

$$\Omega = \{gg,\, gb,\, bg,\, bb\}.$$

男女の出生比率は $\dfrac{1}{2}$ とすると，

$$\mathbb{P}(gg) = \mathbb{P}(gb) = \mathbb{P}(bg) = \mathbb{P}(bb) = \frac{1}{4}$$

となる．

いま，女子の人数 X だけに注目する．標本点 ω が与えられれば，X の値は確定するから，その意味で X は ω の関数 $X = X(\omega)$ である．

実際,

$$X(\{gg\}) = 2,\ X(\{gb\}) = X(\{bg\}) = 1,\ X(\{bb\}) = 0.$$

すると

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{gb\} \cup \{bg\}) = \mathbb{P}(\{gb\}) + \mathbb{P}(\{bg\}) = \frac{1}{2}$$

確率変数の定義

一般に，ある試行の確率モデル $(\Omega, \mathbb{P})$ が与えられたとき，標本空間 Ω 上で定義された実数値関数 $X = X(\omega)$ を**確率変数**とよぶ.

確率変数の累積分布関数の定義

一般に，ある試行の確率モデル $(\Omega, \mathbb{P})$ が与えられたとき，確率変数 X に対して，

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

を確率変数 X の**累積分布関数**という.

確率変数の累積分布関数の性質

⋆ X が区間 $(a, b]$ に入る確率は $\mathbb{P}(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$ となる.
⋆ すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，$0 \le F_X(x) \le 1$
⋆ 単調非減少性：$x_1 < x_2$ のとき，$F_X(x_1) \le F_X(x_2)$.
⋆ 有界性：$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.
⋆ 右連続性：$\lim_{x\downarrow a} F_X(x) = F_X(a)$
ただし，$x \downarrow a$ は x は a に右から近づくことを表す.

離散型分布：確率関数と確率分布表

離散型確率変数と確率関数

⋆ 確率変数 X が離散型であるとは，X のとりえる値が有限個または可算無限個の場合をいう．

⋆ 標本空間を形式的に $\Omega = \{a_0, a_1, \ldots,\}$ と書いたとき，X の確率分布は

$$f_X(a_k) = \mathbb{P}(X = a_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

によって完全に定まる．このような分布を**離散型分布**という．

⋆ $f_X(a)$ を X の**確率関数**という．

確率関数の性質

確率関数 f_X は次の性質をもつ：

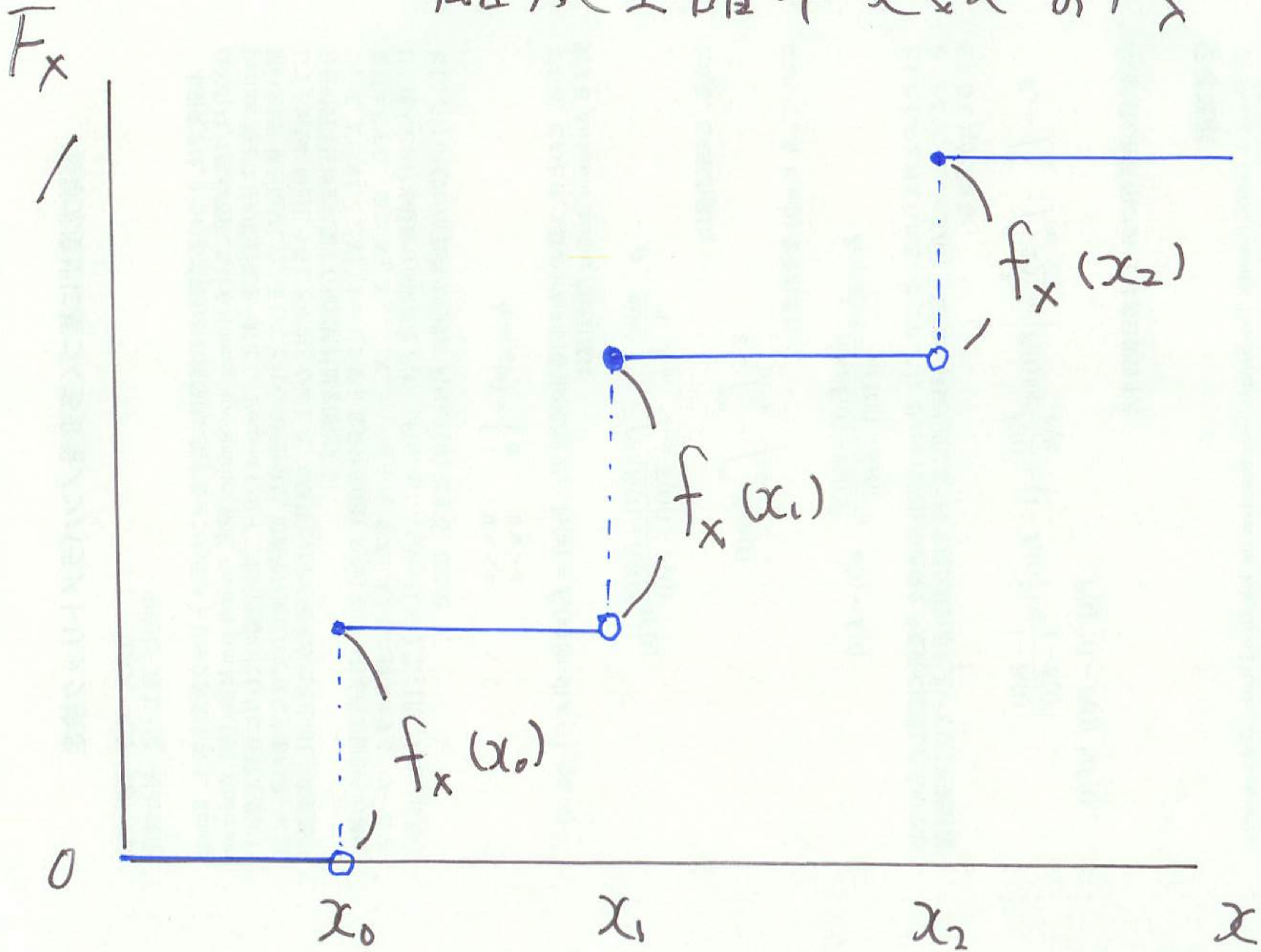
(i) $f_X(a_k) \geq 0, \qquad k = 0, 1, \ldots,$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} f_X(a_k) = 1$

X のとりえる値が有限個のとき，確率関数を表にまとめたものを確率分布表という.

X の値	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_k	計
f_X の値	$f_X(a_0)$	$f_X(a_1)$	$f_X(a_2)$	$\cdots$	$f_X(a_k)$	1

離散型確率変数のF_X



連続型確率変数とは

確率変数 X が連続型であるとは，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\mathbb{P}(X = x) = 0$$

が成立するときをいう．

連続型確率変数 X の確率密度関数

連続型確率変数 X の累積分布関数 F_X が微分可能のとき，X の確率密度関数を

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

で定める．

したがって，

$$\mathbb{P}(X \le x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$

となる．一般には，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a < X \le b) &= F_X(b) - F_X(a) \qquad \text{（確率と累積分布関数の関係から）} \\
&= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx \\
&= \int_{a}^{b} f_X(x)\,dx \qquad \text{（積分の性質から）}
\end{aligned}$$

確率密度関数の性質

確率密度関数 f_X は次の性質をもつ：

(i) $f_X(x) \geq 0\,(\forall x)$,

(ii) $\int_{\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

(iii) $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

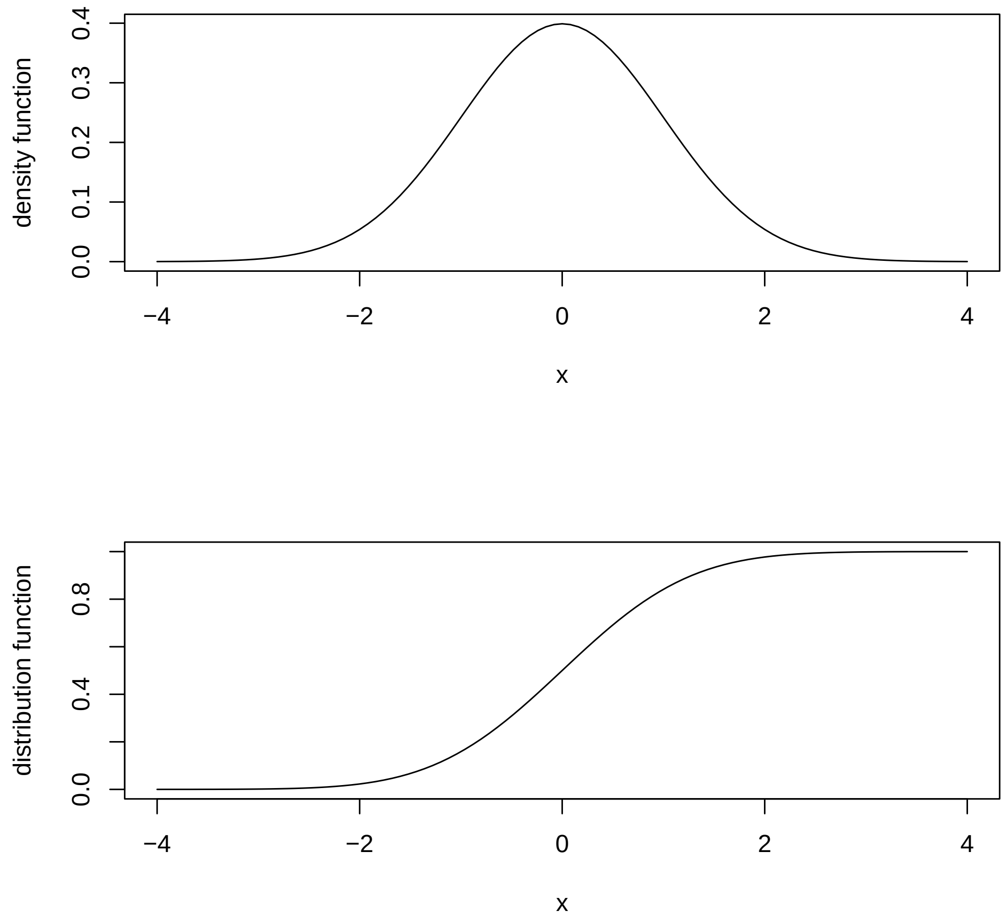


Figure 1: 連続型確率変数の確率密度関数(上)と分布関数（下）

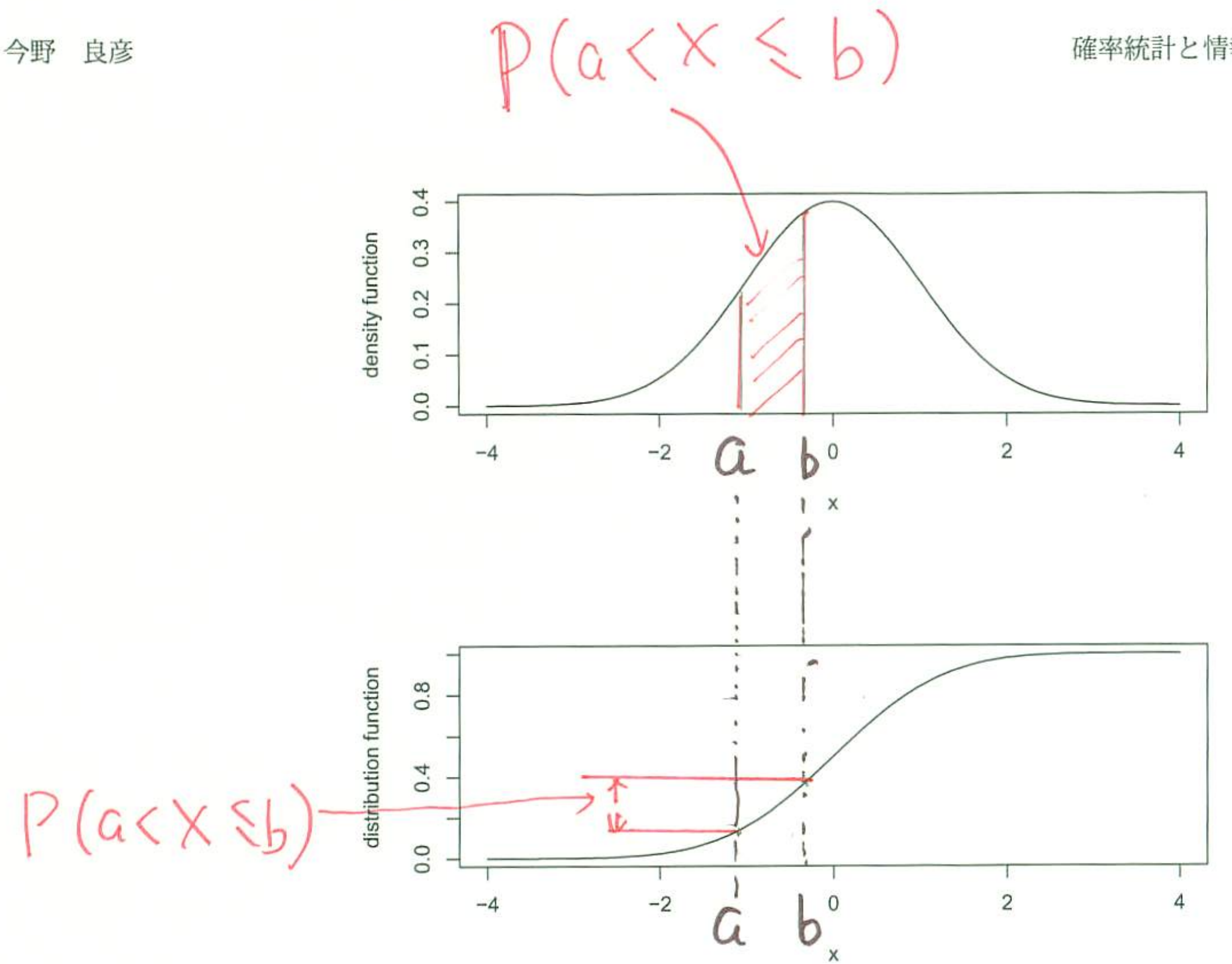


Figure 1: 連続型確率変数の確率密度関数(上)と分布関数（下）

離散型確率変数の期待値

離散型確率変数 X の確率関数を $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ としたとき，X の平均値と分散を

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_x x f_X(x) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x) =: \mu, \\ \mathbb{VAR}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 f_X(x) \end{aligned}$$

⋆ 平均値は X の分布の位置をあらわす.

⋆ 分散は X のばらつきをあらわす．分散が小さいほど X はその平均値 μ の近くを変動する.

連続型確率変数の期待値

連続型確率変数 X の確率密度関数を $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ としたとき，X の平均値と分散を

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int x f_X(x)\,dx =: \mu, \\ \mathbb{VAR}[X] &= \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \int (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx \end{aligned}$$

⋆ 平均値は X の分布の位置をあらわす.

⋆ 分散は X のばらつきをあらわす．分散が小さいほど X はその平均値 μ の近くを変動する.

a, b を定数とする．

平均値と分散の性質

(i) $\mathbb{E}[aX+b] = a\mathbb{E}[X] + b$

(ii) $\mathbb{VAR}[aX+b] = a^2\mathbb{VAR}[X]$

(iii) $\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2$

$\star$ (i) の確認．$\mathbb{E}[aX+b] = \int(ax+b)f_X(x)\,dx = a\int xf_X(x)\,dx + b\int f_X(x)\,dx = a\mathbb{E}[X] + b =: a\mu + b$．この証明は X は連続型確率変数のときの場合であるが，離散型の場合には，積分を和の記号に直せばよい．

$\star$ (ii) の確認．$\mathbb{VAR}[aX+b] = \int\{(ax+b)-(a\mu+b)\}^2 f_X(x)\,dx = \int a^2(x-\mu)^2 f_X(x)\,dx = a^2\mathbb{VAR}[X]$

$\star$ (iii) の確認. $\mathbb{E}[X] = \mu$ とかく.

$$\begin{aligned}\mathbb{VAR}[X] &= \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mu\mathbb{E}[X] + \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \times \mu + \mu^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2 = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2\end{aligned}$$

ここまでのまとめ

- 試行，標本点，標本空間，事象
- 確率と確率分布の定義．確率の性質
- 確率変数の定義
  - 離散型確率変数 — 確率関数
  - 連続型確率変数 — 確率密度関数
- 累積分布関数
- 確率変数とその特性量

以上の事項についての定義や性質について説明しました．

問題 1

ふたつのサイコロを投げる場合には，標本空間は

$$\Omega = \{(i,\, j) :\, i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, 6\}$$

となる．このとき，

$$\mathbb{P}\{(i,\, j)\} = \frac{1}{36}, \qquad i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, 6$$

となる．さらに，$\mathbb{P}(i + j = 3)$ の確率を求めるには，

$$\{i + j = 3\} = \{(1,\, 2)\} \cup \{(2,\, 1)\}$$

に注意して，

$$\mathbb{P}(i+j=3)=\mathbb{P}(\{(1,\,2)\}\cup\{(2,\,1)\})=\mathbb{P}(\{1,\,2\})+\mathbb{P}(\{2,\,1\})=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}$$

となる．確率変数 X を

$$X((i,\,j))=i+j$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

- $\mathbb{P}(X=x)>0$ となる x の値をすべてもとめよ．
- $\mathbb{P}(X=2)$ の確率を求めよ．
- $\mathbb{P}(X=12)$ の確率を求めよ．
- $\mathbb{P}(X=4)$ の確率を求めよ．

- X の確率分布表を完成させよ.
- 締め切りは 2006 年 11 月 10 日（金）13 時
- このレポートは A4 の紙にかき，数研前のレポート入れに提出すること．表紙に講義名，学籍番号，名前，宿題の締め切り日を書いてください.

2 項分布

標準正規分布

確率変数 X が，母数 n, p(n は自然数，$0 \leq p \leq 1$) の **2 項分布**に従うとは，その確率関数

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$$

ただし，

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}, \qquad 0! = 1$$

2項分布の性質

- $$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = 1$$
- $$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = np$$
- $$\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X-np)^2] = \sum_{x=0}^{n} (x-np)^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = np(1-p)$$

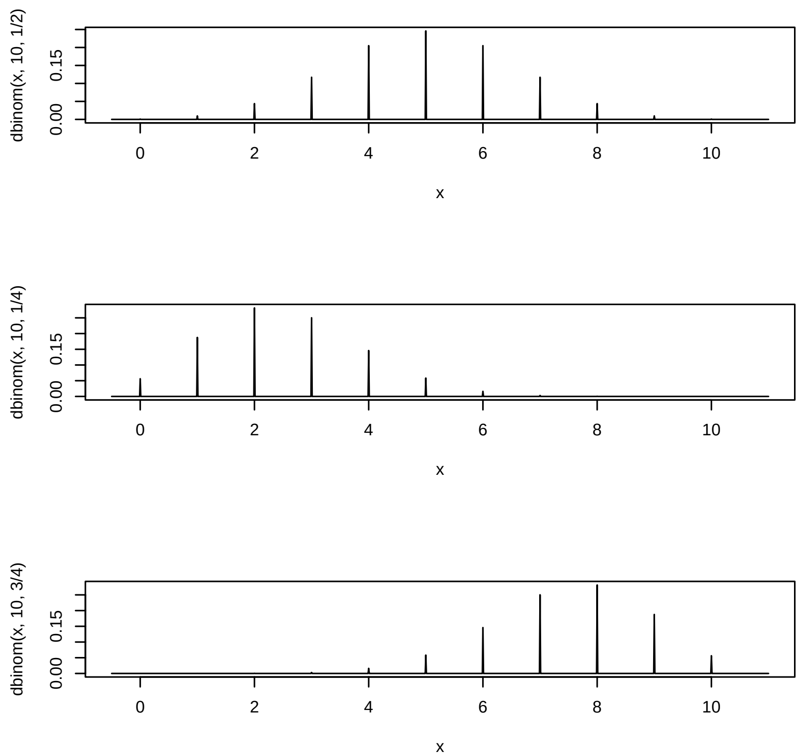


Figure 2: ２項分布の確率関数のグラフ $(n = 10, p = 1/2,\ 1/4,\ 3/4)$

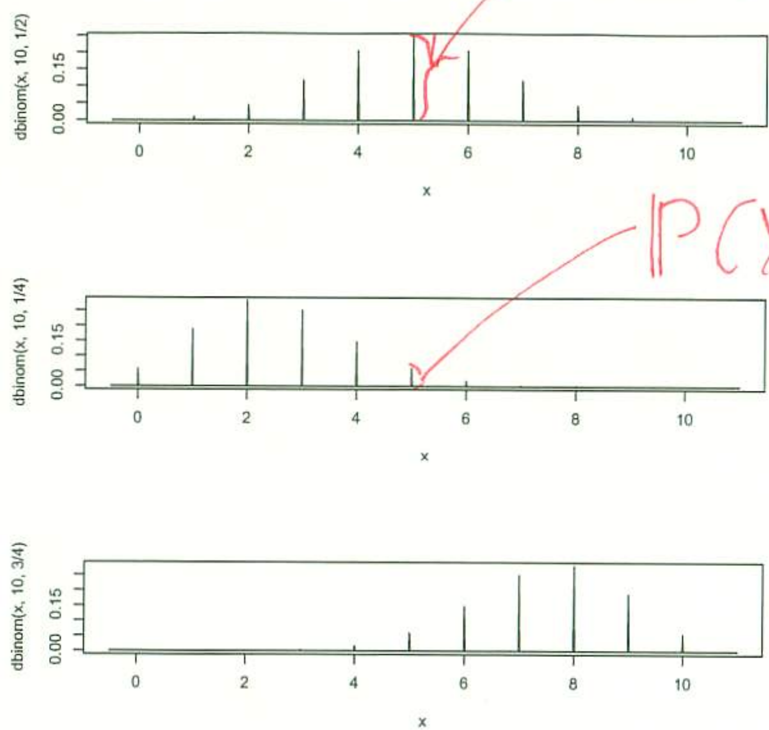


Figure 2: 2 項分布の確率関数のグラフ $(n = 10, p = 1/4,\ 1/2,\ 3/4)$

２項分布の確率関数の作図

```
> x<-seq(-0.5,11,by=0.01)
> op<-par(mfrow=c(3,1))
> plot(x,dbinom(x,10,1/2),type="l")  # "l"(エル)
50 件以上の警告がありました (警告を見るには warnings() を使って下さい)
> plot(x,dbinom(x,10,1/4),type="l")
50 件以上の警告がありました (警告を見るには warnings() を使って下さい)
> plot(x,dbinom(x,10,3/4),type="l")
50 件以上の警告がありました (警告を見るには warnings() を使って下さい)
>
```

ポアソン分布

標準正規分布

確率変数 X が，母数 λ ($\lambda > 0$) の**ポアソン分布**に従うとは，その確率関数

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad x = 0, 1, \ldots$$

ポアソン分布の性質

- $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=1$

- $\displaystyle\mathbb{E}[X]=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=\lambda$

- $\displaystyle\mathbb{VAR}[X]=\mathbb{E}[(X-\lambda)^2]=\sum_{x=0}^{\infty}(x-\lambda)^2\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=\lambda$

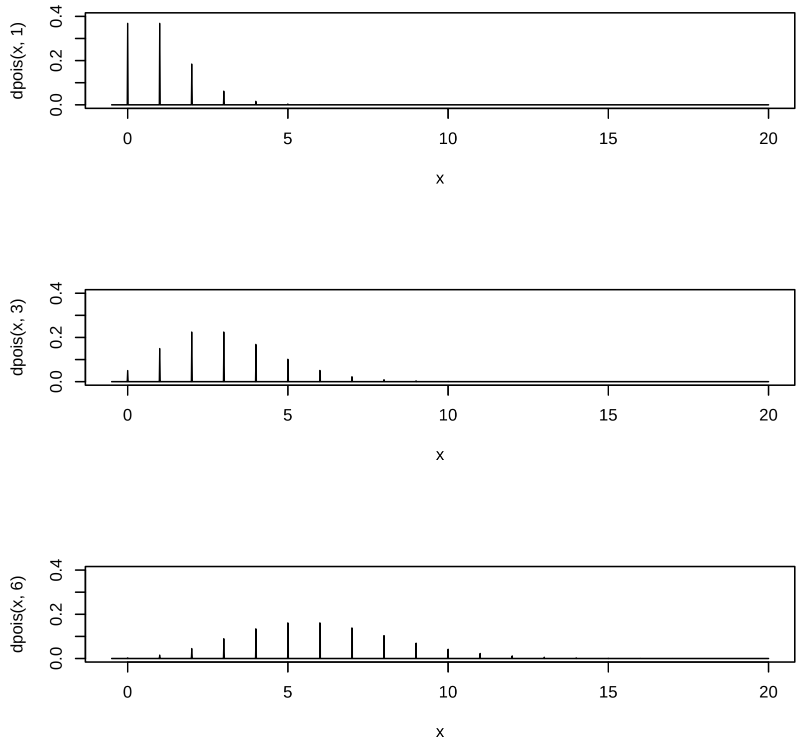


Figure 3: ポアソン分布の確率関数のグラフ($\lambda = 1,\ 3,\ 6$)

標準正規分布の確率密度関数と累積分布関数の作図

```
> op<-par(mfrow=c(3,1))
> x<-seq(-0.5,20,by=0.01)
> plot(x,dpois(x,1),type="l")
50 件以上の警告がありました（警告を見るには warnings() を使って下
さい)
> plot(x,dpois(x,3),type="l")
50 件以上の警告がありました（警告を見るには warnings() を使って下
さい)
> plot(x,dpois(x,6),type="l")
50 件以上の警告がありました（警告を見るには warnings() を使って下
さい)
> op<-par(mfrow=c(3,1))
> plot(x,dpois(x,1),type="l",ylim=c(0,0.4))
50 件以上の警告がありました（警告を見るには warnings() を使って下
さい)
> plot(x,dpois(x,3),type="l",ylim=c(0,0.4))
50 件以上の警告がありました（警告を見るには warnings() を使って下
さい)
> plot(x,dpois(x,6),type="l",ylim=c(0,0.4))
50 件以上の警告がありました（警告を見るには warnings() を使って下
さい)
>
```

正規分布

もっとも基本的な分布である．ガウス分布とも白色雑音とも呼ばれる．

標準正規分布

確率変数 Z が，平均 0，分散 1^2 の**標準正規分布**（$N(0, 1^2)$ と記す）に従うとは，その確率密度関数

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right], \qquad -\infty < z < \infty.$$

すなわち $\mathbb{P}(a < Z \le b) = \int_a^b f_Z(z)\,dz$ （任意の $a, b\,(a < b)$ に対して）

なぜ，平均 0，分散 1^2 というかはあとで説明．

曲線の作図

```
>
> curve(sin,-2*pi,2*pi)             # curve で曲線を描く.
>
```

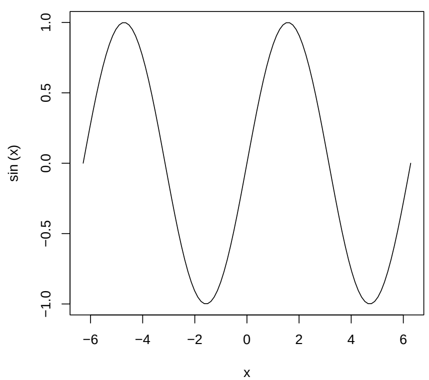


Figure 4: 正弦関数のグラフ

標準正規分布の確率密度関数と累積分布関数の作図

```
>
> op<-par(mfrow=c(2,1))                    # 画面にグラフを同時に描く.
> curve(dnorm(x,0,1),-4,4)                 # 標準正規分布の確率密度関数の作図
> curve(pnorm(x,0,1),-4,4)                 # 標準正規分布の累積分布関数の作図
>
> op<-par(mfrow=c(1,1))                    # 画面を元にもどす.
>
```

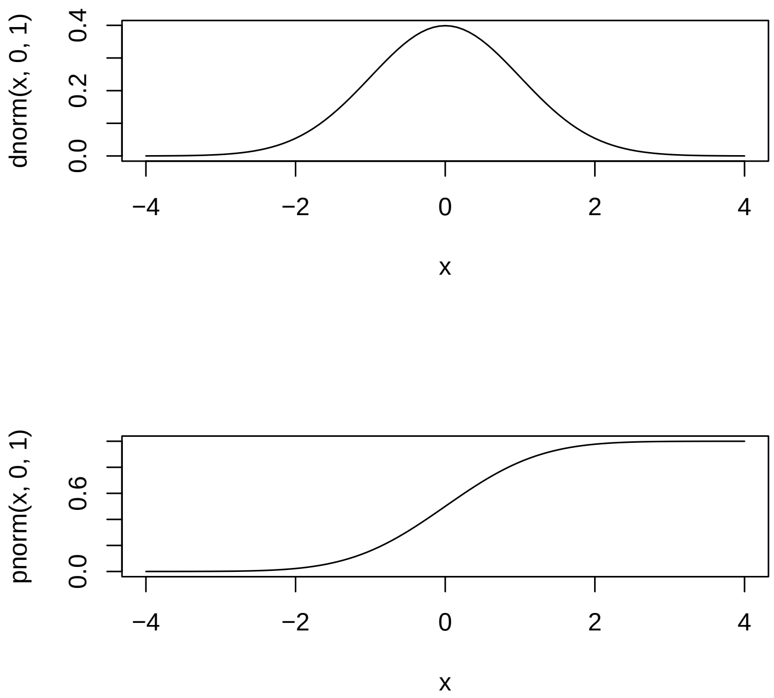


Figure 5: 標準正規分布の確率密度関数と累積分布関数のグラフ

Insert 2006-10-27-zu4.pdf

$X = \sigma Z + \mu$ とおく．ただし，$-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$．このとき，$X$ の確率密度関数は

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad -\infty < x < \infty$$

なぜならば，任意の x に対して，

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(\sigma Z + \mu \le x) = \mathbb{P}(Z \le (x-\mu)/\sigma) \\ &= \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} f_Z(z)\, dz \end{aligned}$$

よって，微積分の基本定理 $\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} g(z)\,dz = g(x)$ と合成関数の微分から

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]
\end{aligned}
$$

したがって，任意の $a, b\,(a < b)$ に対して

$$
\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx
$$

このとき，X は $N(\mu, \sigma^2)$ (平均 μ，分散 σ^2 の正規分布)に従うという.

正規分布の性質

確率変数 X が $N(\mu, \sigma^2)$（平均 μ，分散 σ^2 の正規分布）に従うとき，

- 任意の $a, b\,(a < b)$ に対し，$\mathbb{P}(a < X \le b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 1$

- $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu$

- $\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \sigma^2$

正規分布の性質

確率変数 X が $N(\mu, \sigma^2)$（平均 μ，分散 σ^2 の正規分布）に従うとき，

- $a, b\,(a \neq 0)$ を定数としたとき，$aX + b$ は正規分布 $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ に従う．

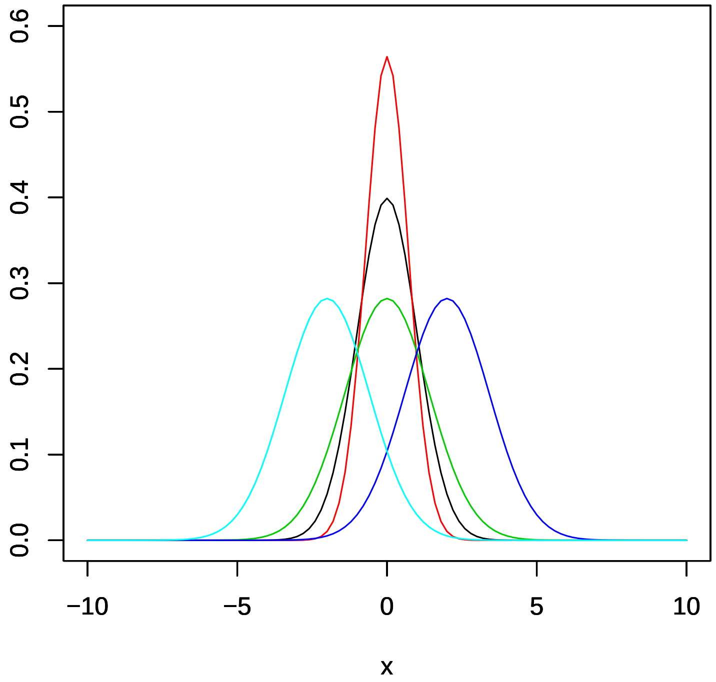


Figure 6: $N(0,\ 1)$, $N(0,\ 2)$, $N(0,\ 1/2)$, $N(2,\ 2)$, $N(-2,\ 2)$ の確率密度関数のグラフ

正規分布の確率密度関数のグラフの作図

```
>
> curve(dnorm(x,0,1),-10,10,ylim=c(0,0.6),ylab="",col=1)
> # N (0, 1 )
> par(new=T)   # グラフの２重書き
> curve(dnorm(x,0,1/sqrt(2)),-10,10,ylim=c(0,0.6),ylab="",col=2)
>  # N (0, 1/2)
> par(new=T)
> curve(dnorm(x,0,sqrt(2)),-10,10,ylim=c(0,0.6),ylab="",col=3)
>  # N (0, 2 )
> par(new=T)
> curve(dnorm(x,-2,sqrt(2)),-10,10,ylim=c(0,0.6),ylab="",col=4)
>  # N (-2, 2 )
> par(new=T)
> curve(dnorm(x,2,sqrt(2)),-10,10,ylim=c(0,0.6),ylab="",col=5)
>  # N (2, 2 )
>
```

一様分布

確率変数 X が $[a,\ b]$ 上の一様分布に従うとは，その確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (a \le x \le b), \\ 0 & \text{（その他）} \end{cases}$$

すなわち，

$$\mathbb{P}(c < X \le d) = \int_c^d f_X(x)\,dx \qquad \text{（任意の } c,\ d\,(a < c < d < b) \text{ に対して）}$$

特に，

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ \dfrac{x-a}{b-a} & (a \le x \le b), \\ 1 & (b < x) \end{cases}$$

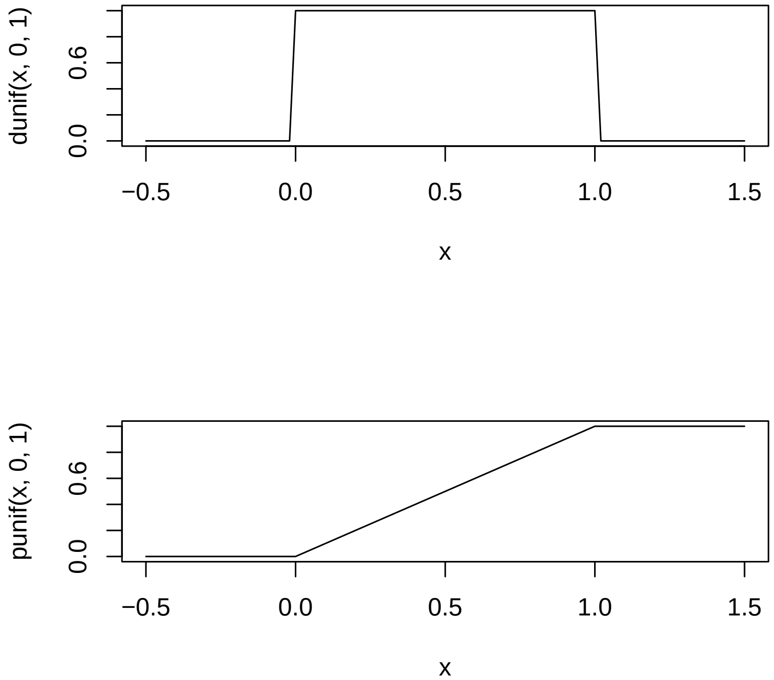


Figure 7: 一様分布の確率密度関数と累積分布関数のグラフ

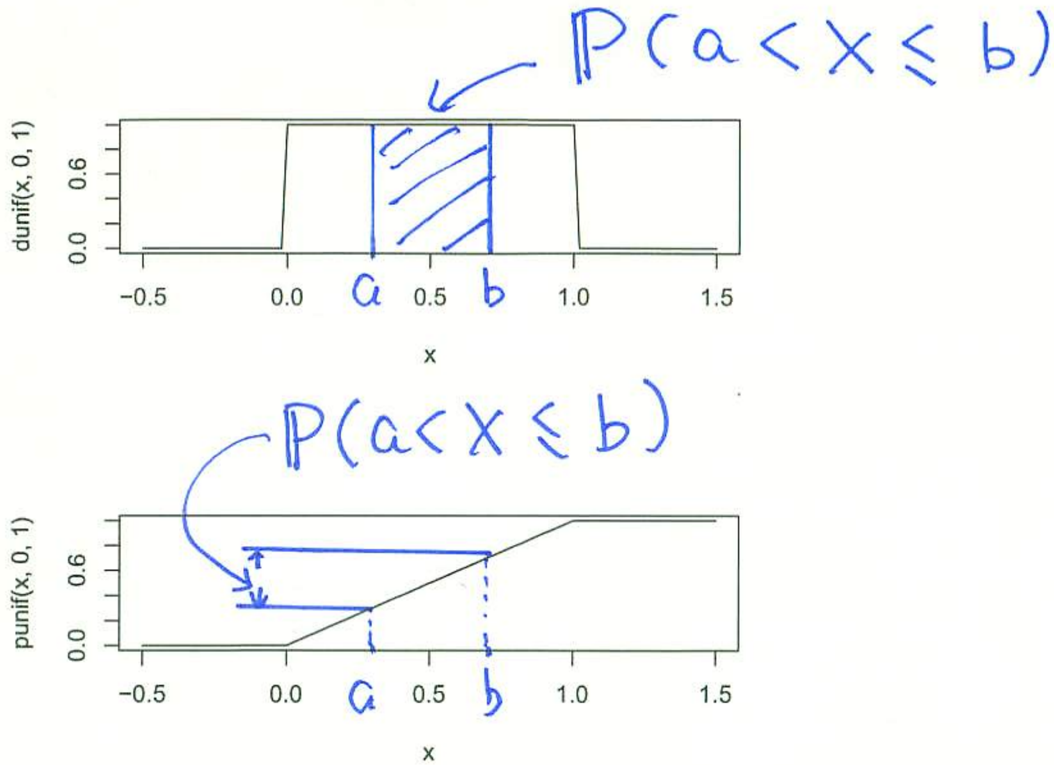


Figure 7: 一様分布の確率密度関数と累積分布関数のグラフ

一様分布の確率密度関数のグラフの作図

```
>
> op<-par(mfrow=c(2,1))                # グラフを上下に２枚の作図
するためのコマンド
>
> curve(dunif(x,0,1),-0.5,1.5)      # 確率密度関数の作図
>
> curve(punif(x,0,1),-0.5,1.5)      # 累積分布関数の作図
>
> op<-par(mfrow=c(1,1))
>
```

指数分布

確率変数 X が母数 $\lambda\,(\lambda > 0)$ の**指数分布**に従うとは，その確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0), \\ 0 & \text{（その他）} \end{cases}$$

すなわち，

$$\mathbb{P}(a < X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx \qquad \text{（任意の } a, b\,(0 < a < b) \text{ に対して）}$$

特に，

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ 1 - e^{-\lambda x} & (x > 0), \end{cases}$$

指数の性質

- $\displaystyle\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1$
- $\displaystyle\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$
- $\displaystyle\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X - \frac{1}{\lambda})^2] = \int_0^\infty (x - 1/\lambda)^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2}$

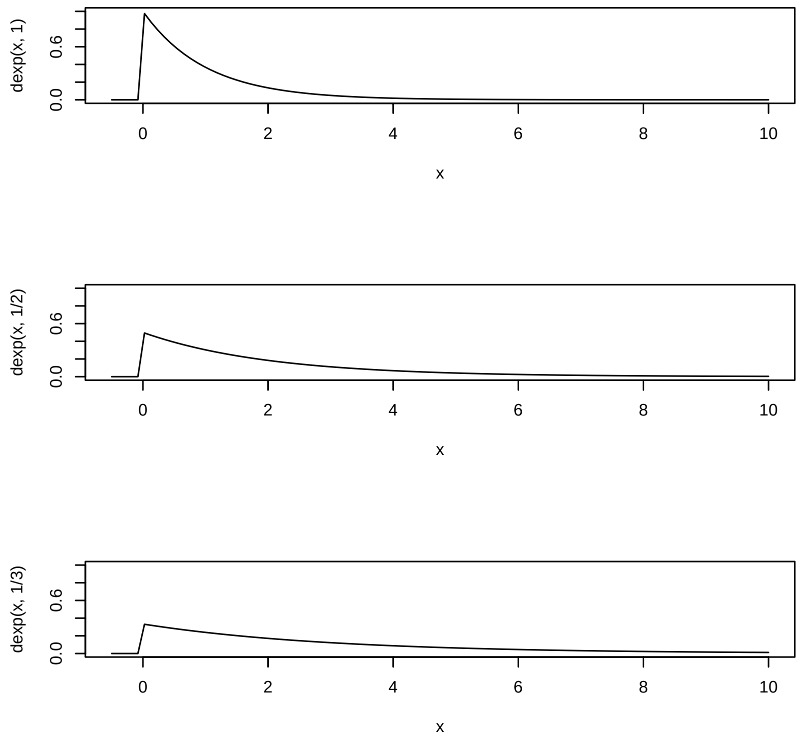
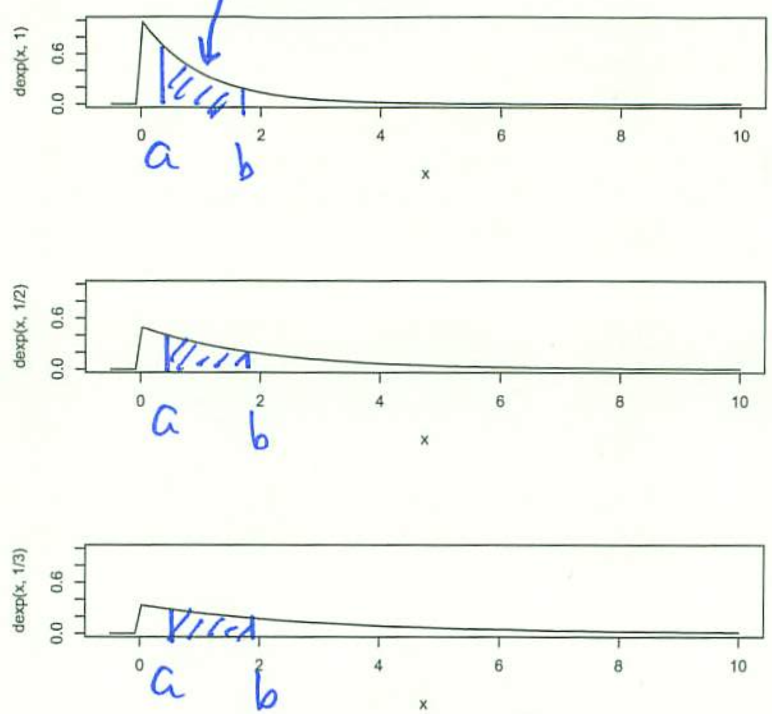


Figure 8: 指数の確率密度関数のグラフ ($\lambda = 1,\ 1/2,\ 1/3$)

$\mathbb{P}(a < X \leq b)$



$\lambda = 1$

$\lambda = 2$

$\lambda = 3$

Figure 8: 指数の確率密度関数のグラフ ($\lambda = 1, 2, 3$)

指数の確率密度関数のグラフの作図

```
> op<-par(mfrow=c(3,1))
> curve(dexp(x,1),-0.5,10,ylim=c(0,1))
> # \lambda = 1
> curve(dexp(x,1/2),-0.5,10,ylim=c(0,1))
> # \lambda = 2
> curve(dexp(x,1/3),-0.5,10,ylim=c(0,1))
> # \lambda = 3
>
```

ここまでのまとめ

- 離散型分布
  - 二項分布
    - 確率関数・平均値・分散
  - ポアソン分布
    - 確率関数・平均値・分散

- 連続型分布
  - 正規分布
    - 確率密度関数・平均値・分散
  - 指数分布
    - 確率密度関数・平均値・分散
  - 一様分布
    - 確率密度関数

以上の事項についての定義や性質について説明しました.

問題 2

- 平均 $\mu =$ 誕生月, $\sigma = 2$ の正規分布の確率密度関数と分布関数のグラフを作成せよ．ただし，確率密度関数のグラフの裾が x 軸に重なる範囲で作図せよ．

ヒント

```
> op<-par(mfrow=c(2,1))
> curve(dnorm(x,??,??),??,??)
>
> curve(pnorm(x,??,??),??,??)
>
```

- 累積分布関数のグラフと $y = 1/2$ と交差する点の x 座標の値を述べよ．
- 締め切りは 2006 年 11 月 10 日（金）13 時

- このファイル名を mejiro-hanako-061110-normal.txt と mejiro-hanako-061110-normal.pdf（グラフのファイル）とせよ.