

確率統計と情報処理・演習（2008 年度後期）

2 変量データ分析

2008 年 10 月 10 日

日本女子大学理学部数物科学科 今野 良彦

September 25, 2008

今日の講義の目的と概要

- 2変量のデータを各変量ごとに「1変量のデータの分析」を行う．
 - － ヒストグラム・箱ひげ図・分布の代表値・ばらつき
- 散布図 — 2変量のデータとして分布を眺めること．
- 回帰直線 — 散布図をみて，全体として右上がりまたは右下がりの傾向があったときに，その傾向を示す直線を引くこと．
- 相関係数 — データの直線的な傾向の強弱を数値で示すこと．

身長と体重のデータ

番号	身長	体重	番号	身長	体重
1	148	41	9	137	31
2	160	49	9	149	47
3	159	45	10	160	47
4	153	43	11	151	42
5	151	42	12	157	39
6	140	49	13	157	48
7	156	49	14	144	36

Figure 1: 中学生 14 人の体格データ

cbind

```
> height
[1] 148 160 159 153 151 140 156 137 149 160 151 157 157 144
> weight
[1] 41 49 45 43 42 29 49 31 47 47 42 39 48 36
> length(weight)      # オブジェクト weight のデータの個数を調べる
[1] 14
> length(height)
[1] 14
> bodydata<-cbind(height,weight)  # データは行ベクトルを行列配置
> bodydata
      height weight
[1,]    148     41
[2,]    160     49
[3,]    159     45
[4,]    153     43
[5,]    151     42
[6,]    140     29
# 以下は略
> bodydata[1,]
height weight
   148     41
> bodydata[2,]
height weight
   160     49
```

matrix

```
> bodydata2<-matrix(  
+ c(148,160,159,153,151,140,156,137,149,160,151,157,157,144,  
+ 41,49,45,43,42,29,49,31,47,47,42,39,48,36  
+ ),,2) # matrix(c( ....),列の数,行の数)  
> bodydata2  
      [,1] [,2]  
[1,] 148  41  
[2,] 160  49  
[3,] 159  45  
[4,] 153  43  
[5,] 151  42  
[6,] 140  29  
[7,] 156  49  
[8,] 137  31  
[9,] 149  47  
[10,] 160  47  
[11,] 151  42  
[12,] 157  39  
[13,] 157  48  
[14,] 144  36  
>  
> mean(bodydata[,1]) # 身長の平均  
[1] 151.5714  
> mean(bodydata[,2]) # 体重の平均  
[1] 42
```

グラフの同時表示

mfrow

```
> par(mfrow=c(2,1)) # グラフを 2 行に表示  
> hist(height)  
> boxplot(height)  
> par(mfrow=c(1,1)) # 元の戻す
```

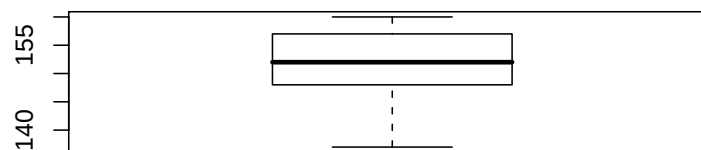
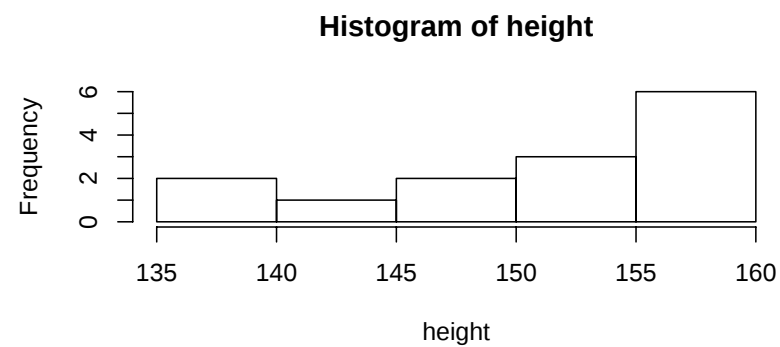


Figure 2: ヒストグラムと箱ひげ図

問題 1

- 身長と体重のデータを行列配置のオブジェクトに入力．ただし，1 行目は身長で 2 行目は体重
- 身長と体重のデータについてそれぞれ
 - (1) ヒストグラム
 - (2) 平均と中央値
 - (3) 箱ひげ図 (mejiro-hanako-081024-boxplot.pdf)
 - (4) 範囲，四分位偏差，平均偏差，分散，標準偏差を求めよ
- 締め切りは 2008 年 10 月 24 日 (金) 13 時
- mejiro-hanako-081024.txt

テキストデータの読み込み

エディターを使い data1.txt を作成する。R の「ファイル」から「ディレクトリの変更」を選択し、「Browse」をクリックして、data1.txt のあるディレクトリを指定する。

```
148 41  
160 49  
153 45
```

data1.txt

read.table

```
> x<-read.table("data1.txt")  
> x  
  V1 V2  
1 148 41  
2 160 49  
3 153 45  
>
```

データエディタ

data1.txt

```
> bodydata
      height weight
[1,]      148     41
[2,]      160     49
[3,]      159     45
[4,]      153     43
[5,]      151     42
[6,]      140     29
[7,]      156     49
# 以下は省略
> fix(bodydata)          # データエディタが表示される
> data.entry(bodydata)   # データエディタが表示される
> iris                   # データ iris の表示
> fix(iris)              # データエディタが表示される
>
```

散布図

身長と体重の散布図を作成

```
data1.txt  
>  
> plot(height,weight)  
>
```

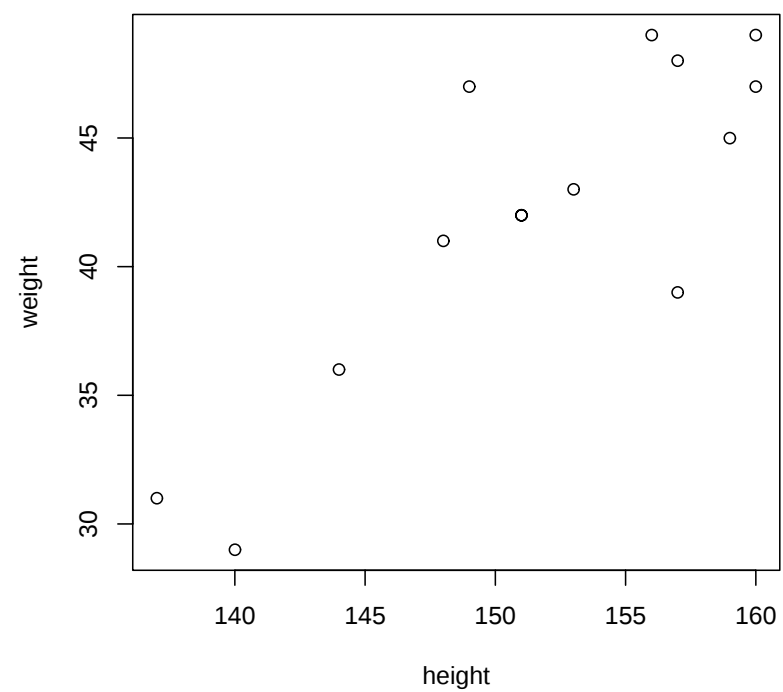


Figure 3: 身長と体重の散布図

散布図から調べることができること

- データは右上がり，右下がり，またはいずれでもない
- 外れ値があるか？

外れ値とは

data1.txt

```
> height2<-c(height,140)
> weight2<-c(weight,60)
> height2
[1] 148 160 159 153 151 140 156 137 149 160 151 157 157 144 140
> weight2
[1] 41 49 45 43 42 29 49 31 47 47 42 39 48 36 60
>
> plot(height2,weight2)
```

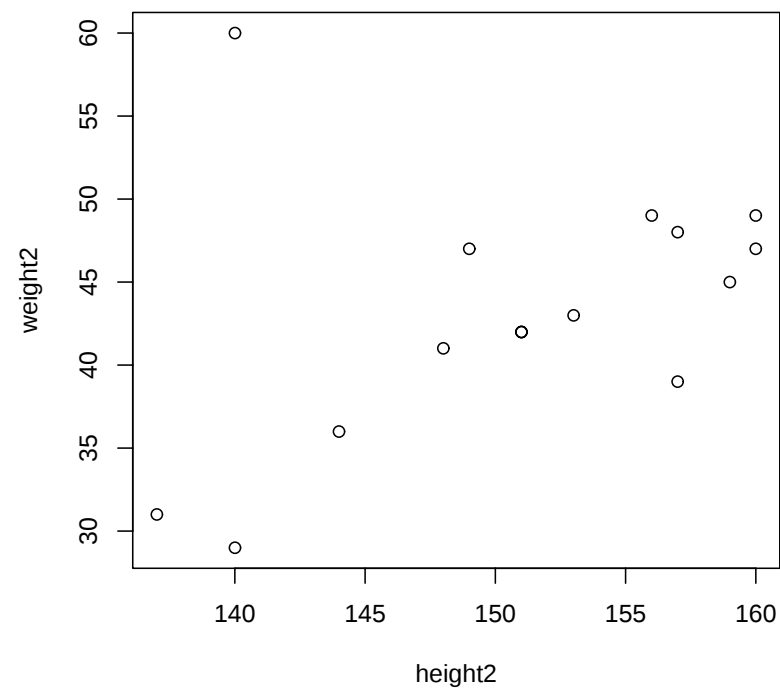


Figure 4: 身長と体重の散布図 (外れ値のある場合)

回帰直線

★ 散布図を見て，全体が右下がりまたは右上がりの傾向があったとき，その傾向を示す直線

$$y = a + bx$$

を散布図に引くことを考える．

★ データに基づいて傾き b と切片 a をどうきめるか？

★ 最小 2 乗法（最小自乗法）をつかおう！（他の方法もある！）

最小 2 乗法

★ データを $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ とする .

★ i ($i = 1, 2, \dots, n$) 番目のデータが x_i に対して ,

データの y 変数の値	y_i
直線上の y の値	$\hat{y}_i = a + bx_i$
誤差	$y_i - \hat{y}_i$

★ 「誤差」が少ないほどよいと考える . すなわち「誤差」が零に近いほどよい!

★ 符号の影響をなくして , データ全体の「誤差」を合計する ! すわわち

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - (a + bx_i)\}^2$$

を最小にする a と b を求める !

最小 2 乗法

★ a と b について Q を偏微分すると

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n \{y_i - (a + bx_i)\} = -2n\bar{y}_n + 2an + 2nb\bar{x}_n = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n x_i \{y_i - (a + bx_i)\} = -2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + 2na\bar{x}_n + 2b \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \end{cases}$$

となる . ただし , $\bar{x}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$ と $\bar{y}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n y_i$

$$\begin{cases} n\bar{y}_n - an - n\bar{x}_n b = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}_n a - \sum_{i=1}^n x_i^2 b = 0 \end{cases}$$

よって ,

$$\begin{cases} n\bar{x}_n\bar{y}_n - n\bar{x}_n a - n\bar{x}_n^2 b = 0 \\ \sum x_i y_i - n\bar{x}_n a - \sum x_i^2 b = 0 \end{cases} \quad (1)$$

よって , $\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}_n^2 \neq 0$ ならば ,

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}_n \bar{y}_n}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}_n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \\ &= \frac{(1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{(1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \\ &=: \frac{s_{xy}}{s_x^2} \\ a &= \bar{y}_n - b\bar{x}_n = \bar{y}_n - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \bar{y}_n \end{aligned} \tag{2}$$

以後は , $\hat{b} = s_{xy}/s_x^2$ と $\hat{a} = \bar{y}_n - \hat{b}\bar{x}_n$ と書くことにする . (データから求めた回帰直線の傾き $\hat{b}$ と切片 $\hat{a}$ という意味)

データより求めた回帰直線の方程式

$s_x^2 \neq 0$ のとき ,

$$y - \bar{y}_n = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \bar{x}_n)$$

ただし ,

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)$$

lm：回帰直線を求める

lm と abline 身長と体重の散布図を作成

```
> height
[1] 148 160 159 153 151 140 156 137 149 160 151 157 157 144
> weight
[1] 41 49 45 43 42 29 49 31 47 47 42 39 48 36
> lm(weight~height) # x 軸を身長, y 軸を体重として回帰直線を求める
Call:
lm(formula = weight ~ height)
Coefficients:
(Intercept)          height
      -70.1505         0.7399 # 切片と傾き
> bodylm<-lm(weight~height)
> plot(height,weight) # 散布図を作成. 身長を $ x $ 軸
> abline(bodylm)      # 散布図に回帰直線を書き入れる
>
```

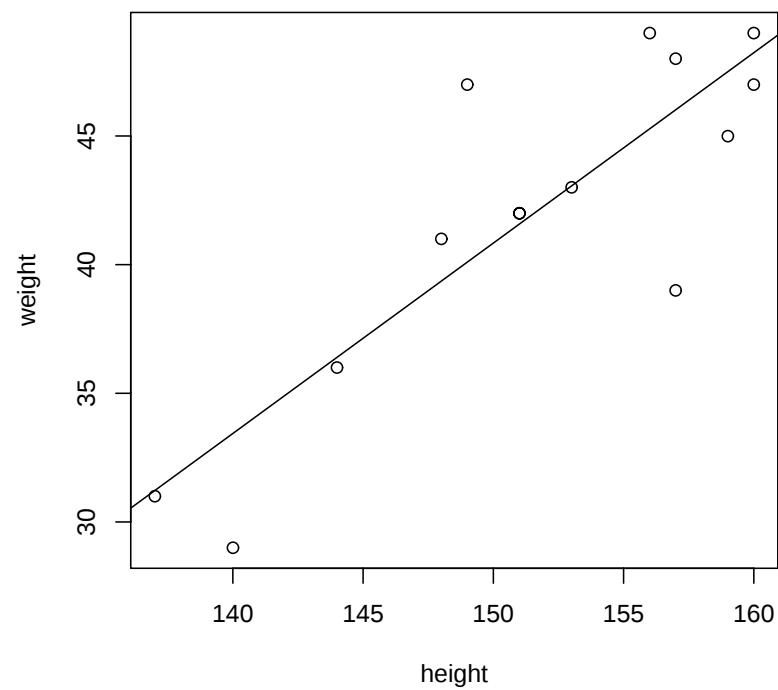


Figure 5: 散布図に回帰直線を書き入れたもの

lm : 回帰直線を求める (体重を x 軸で身長を y 軸)

lm と abline 身長と体重の散布図を作成

```
>
> lm(height~weight)
Call:
lm(formula = height ~ weight)
Coefficients:
(Intercept)      weight
    110.4431      0.9792    # 切片と傾き
>
> bodylm2<-lm(height~weight)
> plot(weight,height) # 散布図を作成 . 体重を x 軸
> abline(bodylm2)     # 散布図に回帰直線を書き入れる
>
```

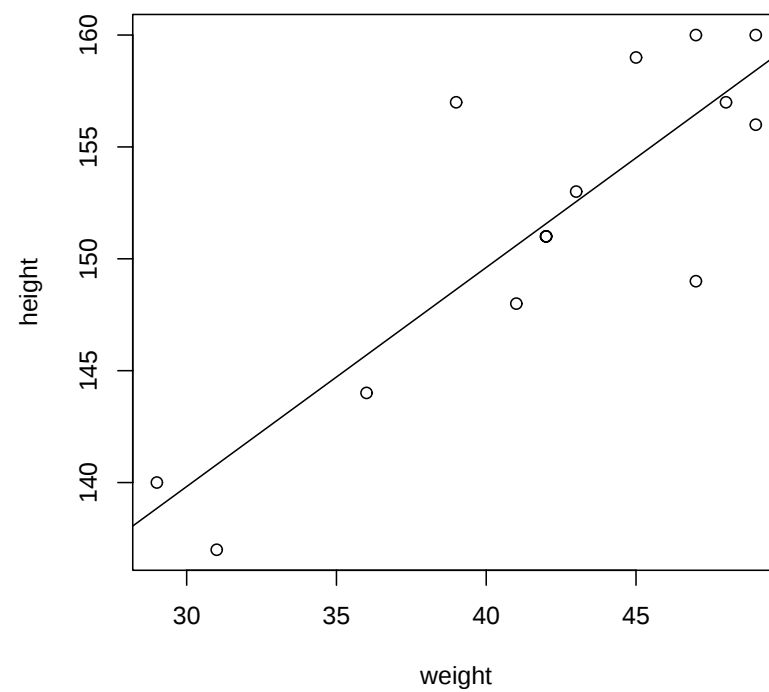


Figure 6: 散布図に回帰直線を書き入れたもの (体重が x 軸)

問題 2

(a) $Q(a, b)$ を a と b について偏微分した式を確認せよ．また，

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

の解が Q を最小にする a と b の値になるのはなぜか？

(b) 連立方程式 (1) の解が

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x}_n \bar{y}_n}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}_n^2}, \quad a = \bar{y}_n - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \bar{x}_n$$

(c) (2) の一番右の等号を確認せよ .

- 締め切りは 2008 年 10 月 24 日 (金) 13 時
- このレポートは A4 の紙にかき , 数研前のレポート入れに提出すること .

データより求めた回帰直線の方程式

★ 「第 I と第 III 象限にあるデータ数」 > 「第 II と第 IV 象限にあるデータ数」
ならば、
データの全体は右上がりの傾向

★ 「第 I と第 III 象限にあるデータ数」 < 「第 II と第 IV 象限にあるデータ数」
ならば、
データの全体は右下がりの傾向

	$x_i - \bar{x}_n$	$y_i - \bar{y}_n$	$(x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)$
I	+	+	+
III	-	-	+
II	-	+	-
IV	+	-	-

★「第Ⅰと第Ⅲ象限にあるデータ数」>「第Ⅱと第Ⅳ象限にあるデータ数」
ならば,

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n) \quad \text{は正}$$

★「第Ⅰと第Ⅲ象限にあるデータ数」<「第Ⅱと第Ⅳ象限にあるデータ数」
ならば,

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n) \quad \text{は負}$$

x と y の共分散と分散

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2$$

また, s_x^2 の正の平方根を s_x , s_y^2 の正の平方根を s_y と書く.

x と y の相関係数の定義

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

また , s_x^2 の正の平方根を s_x , s_y^2 の正の平方根を s_y と書く .

x と y の相関係数の性質

- $-1 \leq r \leq 1$
- r の値が 1 に近いとき , データの全体は右上がり (正の相関が強い)
- r の値が -1 に近いとき , データの全体は右下がり (負の相関が強い)
- r の値が 0 に近いとき , 無相関

相関係数を求める

cor : データ iris の散布図と相関係数

```
> x1<-iris$ Sepal.Length      # データ iris
> x2<-iris$ Sepal.Width
> x3<-iris$Petal.Length
> x4<-iris$Petal.Width
> op<-par(mfrow=c(2,2))      # 4つの散布図を同時に各コマンド
> plot(x1,x2)
> plot(x1,x3)
> plot(x1,x4)
> plot(x2,x3)
> cor(x1,x2)
[1] -0.1175698
> cor(x1,x3)
[1] 0.8717538
> cor(x1,x4)
[1] 0.8179411
> cor(x2,x3)
[1] -0.4284401
```

問題 3

- (a) 50m 走と走り幅跳びのデータを 10 に選び出し , それぞれをオブジェクト x と y に入力せよ .
- (b) オブジェクト x と y の散布図を作成せよ .
- (c) 回帰直線 $y = \hat{a} + \hat{b}x$ を求め , 散布図 ((mejiro-hanako-081024-scatter.pdf) に描きいれよ .
- (d) 相関係数を計算せよ .
- mejiro-hanako-081024.txt