今野　(2009 年 1 月 23 日)

確率統計と情報処理・演習の試験問題 (80 分・80 点満点)

解答上の注意

特別な指示がある場合を除き，答えが合っているかどうかよりも解答の途中過程の論理的展開を重視して採点をします．以下の点に留意して解答を作成すること．

(1) 解答の途中過程は丁寧に記述すること．

(2) 設問中で証明することを求めている場合をのぞき，講義で述べたことは証明なしに用いてよい．しかし，なにをどのように用いたかを可能な限り明示すること．

(3) 各自が理解していることを採点者にわかるように解答を作成することを心がけること．

(4) 等号の使い方に注意すること．

(5) どの問題を解答しているかが明示されていれば，解答は問題番号順でなくともよい．

問題 1　$n \geq 2$ を自然数とし，X を離散型確率変数とする．X は有限の異なる点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ のみにおいて正の確率を持つとする．すなわち，$\mathbb{P}(X = x_i) > 0\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ である．このとき，X の期待値と分散は

$$
\begin{aligned}
\mu &:= \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i f_X(x_i) \\
\mathbb{E}[aX+b] &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) f_X(x_i) \\
\mathbb{VAR}[X] &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f_X(x_i) \\
\mathbb{VAR}[aX+b] &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - \mathbb{E}[aX+b])^2 f_X(x_i) \\
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_X(x_i)
\end{aligned}
$$

である．ただし，$a\,(a \neq 0)$ と b を定数とした．このとき，以下のことを示せ．

(1) $\mathbb{E}[aX+b] = a\mu + b$

(2) $\mathbb{VAR}[aX+b] = a^2\mathbb{VAR}[X]$

(3) $\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2$

ただし，確率関数 f_X の性質を利用してよい：

(i) $\mathbb{P}(X = x_i) = f_X(x_i) > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} f_X(x_i) = 1$

解答と配点　(1) 10 (2) 10 (3) 10 計 30

(1) $\sum_{i=1}^{n} f_X(x_i) = 1$ より

$$
\mathbb{E}[aX+b] = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) f_X(x_i) = a\sum_{i=1}^{n} x_i f_X(x_i) + b\sum_{i=1}^{n} f_X(x_i) = a\mathbb{E}[X] + b
$$

(2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{VAR}[aX+b] &= \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-\mathbb{E}[aX+b])^2 f_X(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-a\mathbb{E}[X]-b)^2 f_X(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(ax_i-a\mathbb{E}[X])^2 f_X(x_i) \\
&= a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mathbb{E}[X])^2 f_X(x_i) = a^2\mathbb{VAR}[X]
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{VAR}[X] &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) f_X(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\mu x_i+\mu^2) f_X(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 f_X(x_i) - 2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i f_X(x_i) + \mu^2\sum_{i=1}^{n} f_X(x_i) \\
&= \mathbb{E}[X^2]-2\mu\times\mu+\mu^2 = \mathbb{E}[X^2]-\mu^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2]-\{\mathbb{E}[X]\}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 2}}$ m を自然数とする．確率変数 T は自由度 m の t 分布に従うとする．すなわち，任意の実数 $a, b\,(a<b)$ に対して，

$$\mathbb{P}(a<T\le b)=\int_a^b f_T(z)\,dz, \qquad f_T(z)=\frac{\Gamma((m+1)/2)}{\sqrt{m\pi}\,\Gamma(m/2)}\left(1+\frac{z^2}{m}\right)^{-(m+1)/2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_T(z)\,dz=1$$

である．ただし，$\Gamma(m)=\int_0^\infty x^{m-1}e^{-x}\,dx$ である．また，$\mathbb{P}(T\le b)=\lim_{a\to-\infty}\mathbb{P}(a<T\le b)$ と $\mathbb{P}(T>a)=\lim_{b\to\infty}\mathbb{P}(a<T\le b)$ とする．

(1) 任意の正の実数 c に対して，

$$\mathbb{P}(T\le -c)=\mathbb{P}(T>c)$$

を示せ．

(2) $0<\alpha<1/2$ なる数 α に対して，実数 k_α は方程式

$$\int_{-\infty}^{k_\alpha} f_T(z)\,dz=1-\alpha$$

をみたす点とする．このとき，

$$k_\alpha>0$$

を示せ．

(3) $0<\alpha<1/2$ なる数 α に対して，実数 k_α は方程式

$$\int_{-\infty}^{k_\alpha} f_T(z)\,dz=1-\alpha$$

をみたす点とする．このとき，確率

$$\mathbb{P}(0<T\le k_\alpha)$$

を求めよ．

ヒント：関数 g に対して，以下の積分の性質や公式は証明なしに用いてよい．

- 実数 a, b, c に対して，$\int_a^c g(z)\,dz = \int_a^b g(z)\,dz + \int_b^c g(z)\,dz$
- $\int_a^b g(z)\,dz = -\int_b^a g(z)\,dz$
- $a < b$ とする．$g(x) > 0\,(a \le x \le b)$ のとき，$\int_a^b g(x)\,dx > 0$
- 積分の変数変換の公式

解答と配点　(1) 10 (2) 10 (3) 10 計 30

(1) $w = -z$ とおけば，$f_T(-z) = f_T(w)$ に注意して，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \le -c) &= \lim_{a \to -\infty} \mathbb{P}(a < T \le -c) = \lim_{a \to -\infty} \int_a^{-c} f_T(z)\,dz = \lim_{a \to -\infty} \int_{-a}^{c} f_T(-w)\,(-dw) \\
&= \lim_{a \to -\infty} \int_{-a}^{c} -f_T(w)\,dw = \lim_{a \to -\infty} \int_c^{-a} f_T(w)\,dw = \lim_{b \to \infty} \int_c^{b} f_T(w)\,dw = \lim_{b \to \infty} \mathbb{P}(c < T \le b) \\
&= \mathbb{P}(c < T)
\end{aligned}$$

(2) $c = 0$ とおけば，(1) より

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(T \le 0) = \int_{-\infty}^{0} f_T(z)\,dz$$

となる．さらに，$0 < \alpha < 1/2$ なので，

$$\int_{-\infty}^{k_\alpha} f_T(z)\,dz > \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{0} f_T(z)\,dz$$

したがって，

$$0 < \int_{-\infty}^{k_\alpha} f_T(z)\,dz - \int_{-\infty}^{0} f_T(z)\,dz = \int_0^{k_\alpha} f_T(z)\,dz$$

となる．$f_T(z) > 0$ より，$k_\alpha > 0$ となる．

(3)

$$\mathbb{P}(0 < T < k_\alpha) = \int_0^{k_\alpha} f_T(z)\,dz = \int_{-\infty}^{k_\alpha} f_T(z)\,dz - \int_{-\infty}^{0} f_T(z)\,dz = 1 - \alpha - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \alpha$$

問題 3　ベクトル x (要素の数は 8 とは限らない) の平均 mean, 和 sum, 要素の数 length ，および四則演算等のコマンドを用いて（すべて用いる必要はない）式

$$\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2}$$

を計算するプログラムを書け．ただし，$\bar{x}_n = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i$ であり，var および sd を用いてはいけない．解答を書くときには，括弧開く「(」と括弧閉じ「)」は大きく書くこと．

ヒント

```
> x
[1]  1  1  0  2  4 -4  6  3
> length(x)
[1] 8
> mean(x)
[1] 1.625
> sum(x)
[1] 13
> sqrt(2)
[1] 1.414214
> 2**3
[1] 8
```

$\boxed{\text{解答と配点}}$ 20 点

```
> x
[1]  1  1  0  2  4 -4  6  3
> sd(x)
[1] 2.973094
> sqrt(sum((x-mean(x))**2)/(length(x)-1))
[1] 2.973094
```