

## 2 変量データ分析

2009 年 10 月 23 日

日本女子大学理学部数物科学科 今野 良彦

October 6, 2009

## 今日の講義の目的と概要

- 2 変量のデータを各変量ごとに「1 変量のデータの分析」を行う。
  - ヒストグラム・箱ひげ図・分布の代表値・ばらつき
- 散布図 — 2 変量のデータとして分布を眺めること。
- 回帰直線 — 散布図をみて、全体として右上がりまたは右下がりの傾向があったときに、その傾向を示す直線を引くこと。
- 相関係数 — データの直線的な傾向の強弱を数値で示すこと。

## 身長と体重のデータ

番号	身長	体重	番号	身長	体重
1	148	41	9	137	31
2	160	49	9	149	47
3	159	45	10	160	47
4	153	43	11	151	42
5	151	42	12	157	39
6	140	49	13	157	48
7	156	49	14	144	36

Figure 1: 中学生 14 人の体格データ

```

cbind
> height
[1] 148 160 159 153 151 140 156 137 149 160 151 157 157 144
> weight
[1] 41 49 45 43 42 29 49 31 47 47 42 39 48 36
> length(weight) # オブジェクト weight のデータの個数を調べる
[1] 14
> length(height)
[1] 14
> bodydata<-cbind(height,weight) # データは行ベクトルを行列配置
> bodydata
      height weight
[1,]    148     41
[2,]    160     49
[3,]    159     45
[4,]    153     43
[5,]    151     42
[6,]    140     49
[7,]    156     49
[8,]    137     31
[9,]    149     47
[10,]   160     47
[11,]   151     42
[12,]   157     39
[13,]   157     48
[14,]   144     36
# 以下は略
> bodydata[1,]
height weight
148      41
> bodydata[2,]
height weight
160      49

```

matrix

```

> bodydata2<-matrix(
+ c(148,160,159,153,151,140,156,137,149,160,151,157,157,144,
+ 41,49,45,43,42,29,49,31,47,47,42,39,48,36
+ ),,2) # matrix(c(...),列の数,行の数)
> bodydata2
      [,1] [,2]
[1,] 148  41
[2,] 160  49
[3,] 159  45
[4,] 153  43
[5,] 151  42
[6,] 140  29
[7,] 156  49
[8,] 137  31
[9,] 149  47
[10,] 160  47
[11,] 151  42
[12,] 157  39
[13,] 157  48
[14,] 144  36
>
> mean(bodydata[,1]) # 身長の平均
[1] 151.5714
> mean(bodydata[,2]) # 体重の平均
[1] 42

```

4

## グラフの同時表示

mfrow

```

> par(mfrow=c(2,1)) # グラフを 2 行に表示
> hist(height)
> boxplot(height)
> par(mfrow=c(1,1)) # 元の戻す

```

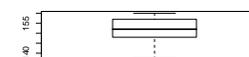
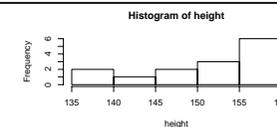


Figure 2: ヒストグラムと箱ひげ図

5

## 問題 1

- 身長と体重のデータを行列配置のオブジェクトに入力。ただし, 1行目は身長で2行目は体重
- 身長と体重のデータについてそれぞれ
  - (1) ヒストグラム
  - (2) 平均と中央値
  - (3) 箱ひげ図 ( mejiro-hanako-081024-boxplot.pdf )
  - (4) 範囲, 四分位偏差, 平均偏差, 分散, 標準偏差
 を求めよ
- 締め切りは 2009 年 10 月 30 日(金)13 時
- 目白花子-091030.txt

6

## テキストデータの読み込み

エディターを使い data1.txt を作成する。R の「ファイル」から「ディレクトリの変更」を選択し、「Browse」をクリックして、data1.txt のあるディレクトリを指定する。

data1.txt

```

148 41
160 49
153 45

```

read.table

```

> x<-read.table("data1.txt")
> x
  V1 V2
1 148 41
2 160 49
3 153 45
>

```

7

## データエディタ

data1.txt

```

> bodydata
  height weight
[1,]   148    41
[2,]   160    49
[3,]   159    45
[4,]   153    43
[5,]   151    42
[6,]   140    29
[7,]   156    49
# 以下は省略
> fix(bodydata)      # データエディタが表示される
> data.entry(bodydata) # データエディタが表示される
> iris               # データ iris の表示
> fix(iris)          # データエディタが表示される
>

```

8

## 散布図

身長と体重の散布図を作成

data1.txt

```

>
> plot(height,weight)
>

```

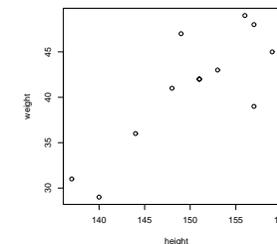


Figure 3: 身長と体重の散布図

10

## 散布図から調べることができること

- データは右上がり, 右下がり, またはいずれでもない
- 外れ値があるか?

11

## 外れ値とは

data1.txt

```

> height2<-c(height,140)
> weight2<-c(weight,60)
> height2
[1] 148 160 159 153 151 140 156 137 149 160 151 157 157 144 140
> weight2
[1] 41 49 45 43 42 29 49 31 47 47 42 39 48 36 60
>
> plot(height2,weight2)

```

12

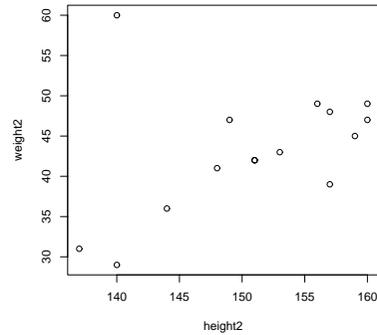


Figure 4: 身長と体重の散布図(外れ値のある場合)

## 回帰直線

★ 散布図を見て、全体が右下がりまたは右上がりの傾向があったとき、その傾向を示す直線

$$y = a + bx$$

を散布図に引くことを考える。

★ データに基づいて傾き  $b$  と切片  $a$  をどうきめるか?

★ 最小2乗法(最小自乗法)をつかおう!(他の方法もある!)

## 最小2乗法

★ データを  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  とする。

★  $i (i = 1, 2, \dots, n)$  番目のデータが  $x_i$  に対して、

データの $y$ 変数の値	$y_i$
直線上の $y$ の値	$\hat{y}_i = a + bx_i$
誤差	$y_i - \hat{y}_i$

★ 「誤差」が少ないほどよいと考える。すなわち「誤差」が零に近いほどよい!

★ 符号の影響をなくして、データ全体の「誤差」を合計する! すわわち

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - (a + bx_i)\}^2$$

を最小にする  $a$  と  $b$  を求める!

## 最小2乗法

★  $a$  と  $b$  について  $Q$  を偏微分すると

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n \{y_i - (a + bx_i)\} = -2n\bar{y}_n + 2an + 2nb\bar{x}_n = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n x_i \{y_i - (a + bx_i)\} = -2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + 2na\bar{x}_n + 2b \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \end{cases}$$

となる。ただし、 $\bar{x}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$  と  $\bar{y}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n y_i$

$$\begin{cases} n\bar{y}_n - an - n\bar{x}_n b = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}_n a - \sum_{i=1}^n x_i^2 b = 0 \end{cases}$$

よって、

$$\begin{cases} n\bar{x}_n \bar{y}_n - n\bar{x}_n a - n\bar{x}_n^2 b = 0 \\ \sum x_i y_i - n\bar{x}_n a - \sum x_i^2 b = 0 \end{cases} \quad (1)$$

よって,  $\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}_n^2 \neq 0$  ならば,

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}_n \bar{y}_n}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}_n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \quad (2) \\ &= \frac{(1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{(1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \\ &=: \frac{s_{xy}}{s_x^2} \\ a &= \bar{y}_n - b\bar{x}_n = \bar{y}_n - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \bar{y}_n \end{aligned}$$

以後は,  $\hat{b} = s_{xy}/s_x^2$  と  $\hat{a} = \bar{y}_n - \hat{b}\bar{x}_n$  と書くことにする。(データから求めた回帰直線の傾き  $\hat{b}$  と切片  $\hat{a}$  という意味)

データより求めた回帰直線の方程式

$s_x^2 \neq 0$  のとき,

$$y - \bar{y}_n = \frac{s_{xy}}{s_x^2} (x - \bar{x}_n)$$

ただし,

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)$$

## lm: 回帰直線を求める

lm と abline 身長と体重の散布図を作成

```
> height
[1] 148 160 159 153 151 140 156 137 149 160 151 157 157 144
> weight
[1] 41 49 45 43 42 29 49 31 47 47 42 39 48 36
> lm(weight~height) # x 軸を身長, y 軸を体重として回帰直線を求める
Call:
lm(formula = weight ~ height)
Coefficients:
(Intercept)      height
   -70.1505      0.7399 # 切片と傾き
> bodylm<-lm(weight~height)
> plot(height,weight) # 散布図を作成. 身長を $ x $ 軸
> abline(bodylm)      # 散布図に回帰直線を書き入れる
```

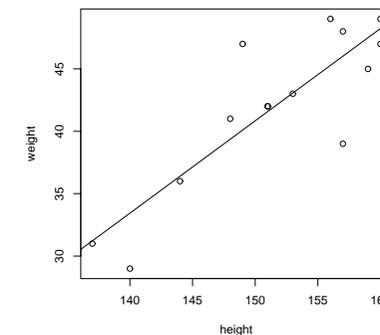


Figure 5: 散布図に回帰直線を書き入れたもの

### lm : 回帰直線を求める (体重を $x$ 軸で身長を $y$ 軸)

```

lm と abline 身長と体重の散布図を作成
>
> lm(height~weight)
Call:
lm(formula = height ~ weight)
Coefficients:
(Intercept)      weight
 110.4431      0.9792  # 切片と傾き
>
> bodylm2<-lm(height~weight)
> plot(weight,height) # 散布図を作成 . 体重を x 軸
> abline(bodylm2)     # 散布図に回帰直線を書き入れる
>
    
```

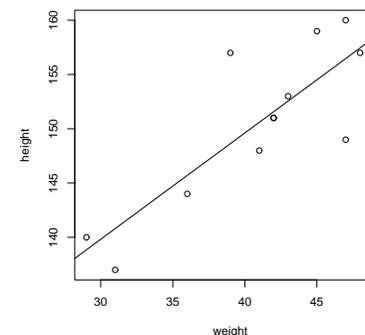


Figure 6: 散布図に回帰直線を書き入れたもの (体重が  $x$  軸)

### 問題 2

(a)  $Q(a, b)$  を  $a$  と  $b$  について偏微分した式を確認せよ . また ,

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

の解が  $Q$  を最小にする  $a$  と  $b$  の値になるのはなぜか ?

(b) 連立方程式 (1) の解が

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x}_n \bar{y}_n}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}_n^2}, \quad a = \bar{y}_n - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \bar{x}_n$$

(c) (2) の一番右の等号を確認せよ .

- 締め切りは 2009 年 10 月 30 日 (金) 13 時
- このレポートは A4 の紙にかき , 数研前のレポート入れに提出すること .

### データより求めた回帰直線の方程式

★ 「第 I と第 III 象限にあるデータ数」 > 「第 II と第 IV 象限にあるデータ数」  
 ならば、  
 データの全体は右上がりの傾向

★ 「第 I と第 III 象限にあるデータ数」 < 「第 II と第 IV 象限にあるデータ数」  
 ならば、  
 データの全体は右下がりの傾向

	$x_i - \bar{x}_n$	$y_i - \bar{y}_n$	$(x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)$
I	+	+	+
III	-	-	+
II	-	+	-
IV	+	-	-

★ 「第 I と第 III 象限にあるデータ数」 > 「第 II と第 IV 象限にあるデータ数」  
 ならば、

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n) \quad \text{は正}$$

★ 「第 I と第 III 象限にあるデータ数」 < 「第 II と第 IV 象限にあるデータ数」  
 ならば、

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n) \quad \text{は負}$$

### $x$ と $y$ の共分散と分散

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2; \quad s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2$$

また、 $s_x^2$  の正の平方根を  $s_x$ 、 $s_y^2$  の正の平方根を  $s_y$  と書く。

### $x$ と $y$ の相関係数の定義

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

また、 $s_x^2$  の正の平方根を  $s_x$ 、 $s_y^2$  の正の平方根を  $s_y$  と書く。

### $x$ と $y$ の相関係数の性質

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

- $-1 \leq r \leq 1$
- $r$  の値が 1 に近いとき、データの全体は右上がり (正の相関が強い)
- $r$  の値が  $-1$  に近いとき、データの全体は右下がり (負の相関が強い)
- $r$  の値が 0 に近いとき、無相関

### 相関係数を求める

cor: データ iris の散布図と相関係数

```
> x1<-iris$ Sepal.Length # データ iris
> x2<-iris$ Sepal.Width
> x3<-iris$Petal.Length
> x4<-iris$Petal.Width
> op<-par(mfrow=c(2,2)) # 4つの散布図を同時に各コマンド
> plot(x1,x2)
> plot(x1,x3)
> plot(x1,x4)
> plot(x2,x3)
> cor(x1,x2)
[1] -0.1175698
> cor(x1,x3)
[1] 0.8717538
> cor(x1,x4)
[1] 0.8179411
> cor(x2,x3)
[1] -0.4284401
```

30

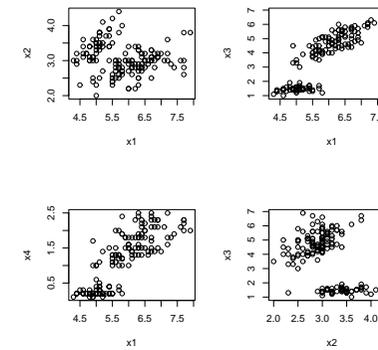


Figure 7: データ iris の散布図: 相関係数  $-0.1175698$  (右上)・ $0.8717538$  (左上)・ $0.8179411$  (右下)・ $-0.4284401$

31

### 問題 3

- 50m 走と走り幅跳びのデータを 10 に選び出し, それぞれをオブジェクト  $x$  と  $y$  に入力せよ.
- オブジェクト  $x$  と  $y$  の散布図を作成せよ.
- 回帰直線  $y = \hat{a} + \hat{b}x$  を求め, 散布図((目白花子-091030-scatter.pdf)に描き入れよ.
- 相関係数を計算せよ.
  - 目白花子-091030.txt

33