楕円型分布モデルの下での２標本問題における共通平均の推定について

津熊 久幸 (千葉大学大学院 自然科学研究科)
今野 良彦 (千葉大学大学院 自然科学研究科)

Loh (1991) では, 2 つの多変量正規分布の共通の平均ベクトルの推定問題が議論されている. Loh (1991) は Graybill-Deal 型結合推定量を改良する Stein 型の結合推定量の導出を試み, 数値実験により 2 乗損失の下で Stein 型結合推定量が Graybill-Deal 型結合推定量を改良することを示している. 本報告では, 2 つの多変量楕円型分布の共通平均の推定問題を扱い, Loh (1991) の結果の拡張をおこなった.

いま, モデルを

$$\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{1}_N \boldsymbol{\xi}' + \boldsymbol{\epsilon}_1, \qquad \boldsymbol{Y}_2 = \boldsymbol{1}_N \boldsymbol{\xi}' + \boldsymbol{\epsilon}_2 \tag{1}$$

とする. ただし, $\boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{Y}_2$, $\boldsymbol{\epsilon}_1$, $\boldsymbol{\epsilon}_2$ は $N \times p$ 確率行列, $\boldsymbol{1}_N$ はすべての成分が 1 である $N \times 1$ ベクトル, $\boldsymbol{\xi}$ は未知の $p \times 1$ ベクトルである. ここで, 確率行列 $\boldsymbol{\epsilon}_i = (\boldsymbol{e}_{i1}, \boldsymbol{e}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{iN})'$ $(i = 1, 2)$ の各行は独立に同一の楕円型分布に従うとし, その密度関数を

$$|\boldsymbol{\Sigma}_i|^{-N/2} h(\boldsymbol{e}_{ij}' \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \boldsymbol{e}_{ij}), \qquad i = 1,\, 2,\ j = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

とする. ただし, $h(\cdot)$ は $[0,\, \infty)$ 上の未知関数, $\boldsymbol{\Sigma}_i$ は未知の $p \times p$ 正定値対称行列である.

ここで, 問題はモデル (1) の未知パラメータ $\boldsymbol{\xi}$ を損失関数 $\widetilde{L}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}; \boldsymbol{\xi}) = N(\widehat{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi})'(\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} + \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1})(\widehat{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi})$ のもとで推定することであり, 具体的には Graybill-Deal 型結合推定量の代替推定量を求めることである. その方法としては, まずリスクの不偏推定量に似たリスクの評価式を求め, その評価式から代替推定量の候補を導出する, という手順でおこなうが, 密度関数 (2) の下ではリスクの評価式の導出が困難であるため, 密度関数 (2) を

$$|\boldsymbol{\Sigma}_1|^{-N/2} |\boldsymbol{\Sigma}_2|^{-N/2} g\big(\operatorname{tr}\{\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_1' \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_2' \boldsymbol{\epsilon}_2\}\big) \tag{3}$$

におきかえて考えていくことにした. ここで, g は $[0,\, \infty)$ 上の未知関数である.

ある直交変換より, 次のような (3) の正準形を得る:

$$|\boldsymbol{\Sigma}_1|^{-N/2} |\boldsymbol{\Sigma}_2|^{-N/2} g\Big(\sum_{i=1}^{2} \big[\operatorname{tr}\{\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\theta})' + \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \boldsymbol{Z}_i' \boldsymbol{Z}_i\}\big]\Big). \tag{4}$$

ただし, $\boldsymbol{\theta} = \sqrt{N} \boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{X}_i$ は $p \times 1$ ベクトル, $\boldsymbol{Z}_i$ は $n \times p$ 行列である. したがって, (3) の $\boldsymbol{\xi}$ の推定問題を (4) の $\boldsymbol{\theta}$ の推定問題におきかえることができ, $\boldsymbol{\theta}$ の推定問題は損失関数 $L(\widehat{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{\theta}) = (\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})'(\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} + \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1})(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$ のもとで考えていくことになる. 上記の記法を用いると, Graybill-Deal 型結合推定量は $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD} = (\boldsymbol{S}_1^{-1} + \boldsymbol{S}_2^{-1})^{-1} (\boldsymbol{S}_1^{-1} \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{S}_2^{-1} \boldsymbol{X}_2)$

と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{Z}_i\,(i = 1, 2)$ である．この推定量を改良するために，$\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD}$ を一般化した推定量の族

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{I}_p - \boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2 \tag{5}$$

を考えた．ただし，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2)\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{I}_p$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{F} = \mathbf{diag}\,(f_1, \ldots, f_p)$ $(f_1 \geq \cdots \geq f_p)$, $\boldsymbol{\Phi}$ は各成分が $\boldsymbol{F}$ の関数である対角行列である．

Kubokawa and Srivastava (1999, 2001) による楕円型分布モデルの下での Stein-Haff identity を用いることにより，推定量(5) のリスクを評価することにより，次のような Stein 型結合推定量 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{ST}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{I}_p - \boldsymbol{\Phi}^{ST})\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2$ を得ることができた:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}^{ST} = \mathbf{diag}\,(\hat{\phi}_1^{ST}, \ldots, \hat{\phi}_p^{ST}), \quad \hat{\phi}_j^{ST} = \frac{\hat{\beta}_j^{ST}/(1-f_j)}{\hat{\beta}_j^{ST}/(1-f_j) + \hat{\alpha}_j^{ST}/f_j}\ (j = 1, \ldots, p),\\
&\hat{\alpha}_j^{ST} = n - p - 1 + 4(1 - f_j) + 2\sum_{k \neq j} \frac{f_j(1 - f_k)}{f_j - f_k},\\
&\hat{\beta}_j^{ST} = n - p - 1 + 4f_j - 2\sum_{k \neq j} \frac{(1 - f_j)f_k}{f_j - f_k}.
\end{aligned}$$

数値実験

得られた推定量 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST}$ と $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD}$ のリスクを比較するため，$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\Sigma}_2\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}$ は対角行列，$(N, p) = (8, 5)$, $(13, 10)$ の場合の数値実験を行った．実験では，誤差項の各行 $\boldsymbol{e}_{ij}\,(i = 1, 2,\ j = 1, 2, \ldots, N)$ の分布として，多変量 t 分布と多変量 Kotz 型分布を考え，次のような結果が得られた:

1. $\boldsymbol{\Sigma}_2\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}$ の各固有値が近い値をとる場合は $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST}$ による $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD}$ のリスク改良率は大きくなる傾向にあり，$(N, p) = (13, 10)$ のときは最大 30%の改良がみられた．
2. 逆に，$\boldsymbol{\Sigma}_2\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}$ の各固有値が散らばっている場合には，$\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST}$ による $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD}$ のリスク改良率は小さくなった．また，その固有値が極端に散らばっている場合，$\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST}$ による $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD}$ の改良率が負になるときもあるが $(p = 5)$，その大きさは -1%程度であった．
3. $\boldsymbol{\Sigma}_2\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}$ の各固有値が同じである場合にサンプルサイズ $N - p$ を固定したもとでは，p が増えるごとに $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST}$ による $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD}$ のリスク改良率が上がった．
4. 推定量 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST}$ は，密度関数 (3) のもとで導出したが，これら数値実験から密度関数 (2) のもとでも，$\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{ST}$ による $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{GD}$ の改良は有効であることがわかった．

参考文献

Graybill, F.A. and Deal, R.B. (1959). *Biometrics* **15**, 543–550.
Kubokawa, T. and Srivastava, M.S. (1999). *Ann. Statist.* **27**, 600–609.
Kubokawa, T. and Srivastava, M.S. (2001). *J. Multivariate Anal.* **76**, 138–152.
Loh, W.L. (1991). *Ann. Statist.* **19**, 297–313.