Modifying the Graybill-Deal estimator of the common regression matrix in two growth curve models [1]

津熊 久幸 (千葉大・自然科学)
今野 良彦 (千葉大・自然科学)

1 はじめに

次のような共通の回帰係数をもつ 2 つの GMANOVA モデル

$$\underset{N_1\times p_1}{\boldsymbol{Y}_1} = \underset{N_1\times m}{\boldsymbol{A}_{11}}\ \underset{m\times q}{\boldsymbol{\Xi}}\ \underset{q\times p_1}{\boldsymbol{A}_{12}} + \underset{N_1\times p_1}{\boldsymbol{\epsilon}_1}, \qquad \underset{N_2\times p_2}{\boldsymbol{Y}_2} = \underset{N_2\times m}{\boldsymbol{A}_{21}}\ \underset{m\times q}{\boldsymbol{\Xi}}\ \underset{q\times p_2}{\boldsymbol{A}_{22}} + \underset{N_2\times p_2}{\boldsymbol{\epsilon}_2} \tag{1}$$

の共通回帰係数の推定問題を考える．ここで, $\boldsymbol{A}_{i1}$ と $\boldsymbol{A}_{i2}$ $(i=1,2)$ はそれぞれ既知のフルランク行列, $\boldsymbol{Y}_i$ と $\boldsymbol{\epsilon}_i$ はそれぞれ確率行列を表し, $\boldsymbol{\Xi}$ は未知のパラメータ行列である．また, $\boldsymbol{\epsilon}_1$ と $\boldsymbol{\epsilon}_2$ は互いに独立とし, $\boldsymbol{\epsilon}_i$ は平均が零行列, 共分散行列が $\boldsymbol{I}_{N_i}\otimes\boldsymbol{\Omega}_i$ の正規分布に従う誤差行列とする ($\boldsymbol{\Omega}_i$ は未知の $p_i\times p_i$ 正定値行列)．この報告では 2 標本問題を取り上げるが, 単調な欠損パターンを持つ 1 標本の GMANOVA モデルにおける回帰係数の推定問題が k 標本の GMANOVA の共通の回帰係数の推定問題に帰着できることに注意する．

モデル (1) の未知の共通回帰行列 $\boldsymbol{\Xi}$ の推定問題を損失関数

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{\Xi},\widehat{\boldsymbol{\Xi}}) = {} & \mathrm{tr}\,\{\boldsymbol{A}_{11}(\widehat{\boldsymbol{\Xi}}-\boldsymbol{\Xi})\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{\Omega}_1^{-1}\boldsymbol{A}_{12}'(\widehat{\boldsymbol{\Xi}}-\boldsymbol{\Xi})'\boldsymbol{A}_{11}'\} \\ & + \mathrm{tr}\,\{\widetilde{\boldsymbol{C}}(\widehat{\boldsymbol{\Xi}}-\boldsymbol{\Xi})\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{\Omega}_2^{-1}\boldsymbol{A}_{22}'(\widehat{\boldsymbol{\Xi}}-\boldsymbol{\Xi})'\widetilde{\boldsymbol{C}}'\}\end{aligned} \tag{2}$$

の下で考える．ただし, $\widehat{\boldsymbol{\Xi}}$ は $\boldsymbol{\Xi}$ の推定量, $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ は $N_2\times m$ の既知のフルランク行列である．本発表では, Sugiura and Kubokawa (1988) による Graybill-Deal 型の結合推定量に替わる推定量を導出し，数値実験で比較した結果を報告する．

2 正準形

適当な直交変換を施すことにより, 次のような正準形を得る:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}_1|\ \boldsymbol{Z}_1 \sim N_{m\times q}(\boldsymbol{\Theta}+\boldsymbol{Z}_1\gamma_1, \boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(1)}), \quad \boldsymbol{X}_2|\ \boldsymbol{Z}_2 \sim N_{m\times q}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Theta}+\boldsymbol{Z}_2\gamma_2, \boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(2)}),\\ &\boldsymbol{Z}_i \sim N_{m\times(p_i-q)}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{(i)}), \qquad \boldsymbol{S}_i\sim W_q(\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(i)}, n_i),\ n_i = N_i-m-p_i+q,\\ &\widehat{\gamma}_i|\ \boldsymbol{W}_i \sim N_{(p_i-q)\times q}(\boldsymbol{\gamma}_i,\ \boldsymbol{W}_i^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(i)}), \qquad \boldsymbol{W}_i\sim W_{p_i-q}(\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{(i)}, n_i+p_i-q) \quad (i=1,2).\end{aligned}$$

ただし, $\boldsymbol{\Theta}$, $\boldsymbol{\gamma}_i$, $\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(i)}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{(i)}$ はそれぞれ未知母数，$(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Z}_i)$, $(\boldsymbol{W}_i, \widehat{\gamma}_i)$, $\boldsymbol{S}_i$ はそれぞれ独立，$\boldsymbol{A}$ は既知の $m\times m$ 正則行列である．上記正準形の下で, 損失関数 (2) は

$$L(\widehat{\boldsymbol{\Theta}},\boldsymbol{\Theta}) = \mathrm{tr}\left[(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}-\boldsymbol{\Theta})\{\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(1)}\}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}-\boldsymbol{\Theta})'\right] + \mathrm{tr}\left[\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}-\boldsymbol{\Theta})\{\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(2)}\}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}-\boldsymbol{\Theta})'\right] \tag{3}$$

となる．さらに，$\boldsymbol{C}$ は既知の $N_2\times m$ 定数行列である．リスクを $R(\widehat{\boldsymbol{\Theta}},\boldsymbol{\Theta}) = \mathbb{E}[L(\widehat{\boldsymbol{\Theta}},\boldsymbol{\Theta})]$ で定める．したがって以後では, 上記正準形の下で共通のパラメータ $\boldsymbol{\Theta}$ の推定を損失関数 (3) の下で考えていくことにする．

[1]研究会「Approximations to the Statistical distributions」（京都大学数理解析研究所，2003 年 3 月 3 日 ～ 3 月 5 日）

3　推定量の族

$(\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(i)}, \boldsymbol{\gamma}_i)$ が既知のとき，1 標本問題における $\boldsymbol{\Theta}$ の最尤推定量はそれぞれ $\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_1$, $\boldsymbol{A}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_2$ である．ただし，$\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_i = \boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{\gamma}_i\,(i=1,2)$ である．Sugiura and Kubokawa (1988) は，$\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_1$ と $\boldsymbol{A}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_2$ の共分散 $\boldsymbol{I}_m \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(1)}$ と $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(2)}$ を重みとして利用する，$(\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(i)}, \boldsymbol{\gamma}_i)$ が未知の場合の Graybill-Deal 型の結合推定量を提案している:

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{GD}) &= \{\boldsymbol{I}_m \otimes (\boldsymbol{S}_1/n_1)^{-1} + (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) \otimes (\boldsymbol{S}_2/n_2)^{-1}\}^{-1} \\ &\quad \times\{\boldsymbol{I}_m \otimes (\boldsymbol{S}_1/n_1)^{-1}\mathrm{vec}(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_1) + (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) \otimes (\boldsymbol{S}_2/n_2)^{-1}\mathrm{vec}(\boldsymbol{A}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_2)\}. \end{aligned} \tag{4}$$

ただし, $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i = \boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{Z}_i\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_i\,(i=1,2)$ である．しかし，結合比に重み $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}$ を考慮にいれた結合推定量は Sugiura and Kubokawa (1988) による Graybill-Deal 型の結合推定量以外はリスクの評価が非常に困難なので，結合比に重み $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}$ を考慮にいれない結合推定量を考え，新たな結合推定量の導出をまずはじめに試みる．

$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{F}$ をそれぞれ, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{I}_q$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{F} = \mathbf{diag}(f_1,\ldots,f_q)$ $(f_1 \geq \cdots \geq f_q)$ を満たす非特異行列, 対角行列とする．ここで, 結合推定量の族

$$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{EQ} = \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_1\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{B}')^{-1} + \boldsymbol{A}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_2\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{I}_q - \boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{B}')^{-1} \tag{5}$$

を考える．ただし, $\boldsymbol{\Phi} \equiv \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{F}) = \mathbf{diag}\,(\phi_1,\ldots,\phi_q)$，$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i = \boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{Z}_i\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_i$, $(i=1,2)$ である．この結合推定量は, ある自然な変換に関する共変な推定量である．ここで, α_j と β_j がある $\boldsymbol{F}$ の関数であり, $\boldsymbol{\Phi}$ の成分が $\phi_j = \beta_j/(\alpha_j+\beta_j)$, $j = 1, 2, \ldots, q$, とできるとき, 結合推定量 (5) は

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}\,(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{EQ}) &= \{\boldsymbol{I}_m \otimes (\boldsymbol{B}'\mathbf{diag}(\beta_j)\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{I}_m \otimes (\boldsymbol{B}'\mathbf{diag}(\alpha_j)\boldsymbol{B})\}^{-1} \\ &\quad \times\{\boldsymbol{I}_m \otimes (\boldsymbol{B}'\mathbf{diag}(\beta_j)\boldsymbol{B})\ \mathrm{vec}\,(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_1) \\ &\quad +\boldsymbol{I}_m \otimes (\boldsymbol{B}'\mathbf{diag}(\alpha_j)\boldsymbol{B})\mathrm{vec}(\boldsymbol{A}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_2)\}, \qquad (6) \\ \mathbf{diag}\,(\alpha_j) &= \mathbf{diag}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_q), \\ \mathbf{diag}\,(\beta_j) &= \mathbf{diag}\,(\beta_1,\ldots,\beta_q)\end{aligned}$$

と書けることに注意する．また，$\alpha_j = n_2/f_j$ と $\beta_j = n_1/(1-f_j)$ とおけば，(4) において $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{I}_q$ とした推定量を得る．

推定量 (6) のリスクを評価することにより α_j と β_j を具体的に求めたあと，既知の結合比の重み $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}$ で推定量 $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{EQ}$ を修正することで推定量 (4) の代替推定量として

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}\,(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{EQ'}) &= \{\boldsymbol{I}_m \otimes (\boldsymbol{B}'\mathbf{diag}(\beta_j)\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) \otimes (\boldsymbol{B}'\mathbf{diag}(\alpha_j)\boldsymbol{B})\}^{-1} \\ &\quad \times\{\boldsymbol{I}_m \otimes (\boldsymbol{B}'\mathbf{diag}(\beta_j)\boldsymbol{B})\ \mathrm{vec}\,(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_1) \\ &\quad +(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) \otimes (\boldsymbol{B}'\mathbf{diag}(\alpha_j)\boldsymbol{B})\mathrm{vec}(\boldsymbol{A}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_2)\}\end{aligned}$$

なるものを与えることを目指す．上記推定量の族において，$\alpha_j = n_2/f_j$, $\beta_j = n_1/(1-f_j)$ とおけば，推定量 (4) を得ることに注意する．また，それ以外の具体的な α_j と β_j の構成は次の節で行う．

4 Stein 型結合推定量

族 (5) における $\mathbf{\Phi}$ をうまく定めることにより，リスクの小さい推定量を求めることをめざす．この導出の手順は以下の通りである．

1. Stein's identity や Haff's identity などの部分積分法や, Loh (1991) による固有値に関する演算結果を用いて, (5) のリスクの不偏推定量を求める
2. このリスクの不偏推定量を評価することにより $\mathbf{\Phi}$ の候補を導く
3. この $\mathbf{\Phi}$ の候補を使って, その各成分を $\phi_j = \beta_j/(\alpha_j+\beta_j)$, $j=1,\,2,\,\ldots\,,\,q$, と分解し, 推定量 (6) 内の $\boldsymbol{I}_m \otimes (\boldsymbol{B}'\mathbf{diag}(\alpha_j)\boldsymbol{B})$ を $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) \otimes (\boldsymbol{B}'\mathbf{diag}(\alpha_j)\boldsymbol{B})$ に置き換えて, 新たな結合推定量を構成する

ここで, 導出された $\mathbf{\Phi}$ は以下の通りである:

$$\mathbf{\Phi}^{ST} = \mathbf{diag}\,(\phi_1^{ST},\ldots,\phi_q^{ST}), \quad \phi_j^{ST} = \frac{\beta_j^{ST}}{\beta_j^{ST}+\alpha_j^{ST}},$$

$$f_j \times \alpha_j^{ST} = (n_2-q-1)h_{2j} + (r_1-r_2)f_j + 4h_{2j}(1-f_j) + 2h_{2j}\sum_{k\neq j}\frac{f_j(1-f_k)}{f_j-f_k},$$

$$(1-f_j)\times\beta_j^{ST} = (n_1-q-1)h_{1j} + (r_2-r_1)(1-f_j) + 4h_{1j}f_j - 2h_{1j}\sum_{k\neq j}\frac{(1-f_j)f_k}{f_j-f_k},$$

$$h_{1j} = m\tilde{r}_1(1-f_j)/n_1 + \tilde{r}_2(\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})f_j/n_2,$$

$$h_{2j} = \tilde{r}_1(\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C})(1-f_j)/n_1 + \tilde{r}_2(\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1})'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}))f_j/n_2,$$

$$\tilde{r}_i = \frac{n_i+p_i-q-1}{n_i-1} = \frac{N_i-m-1}{N_i-m-p_i+q-1} \quad (i=1,2),$$

$$r_1 = m\tilde{r}_1, \qquad r_2 = \tilde{r}_2\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1})'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}).$$

したがって, 新たな推定量の候補は次のようになる:

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}(\widehat{\mathbf{\Theta}}^{ST}) = {} & [\boldsymbol{I}_m \otimes (\boldsymbol{B}'\,\mathbf{diag}\,(\beta_j^{ST})\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\otimes(\boldsymbol{B}'\,\mathbf{diag}\,(\alpha_j^{ST})\boldsymbol{B})]^{-1} \\ & \times [\{\boldsymbol{I}_m \otimes (\boldsymbol{B}'\,\mathbf{diag}\,(\beta_j^{ST})\boldsymbol{B})\}\mathrm{vec}(\widehat{\mathbf{\Theta}}_1) \\ & \quad + \{(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\otimes(\boldsymbol{B}'\,\mathbf{diag}\,(\alpha_j^{ST})\boldsymbol{B})\}\mathrm{vec}(\boldsymbol{A}^{-1}\widehat{\mathbf{\Theta}}_2)].\end{aligned}$$

5 数値実験

$\mathbf{\Sigma}_{11\cdot2}^{(1)}$ と $\mathbf{\Sigma}_{11\cdot2}^{(2)}$ がともに既知である場合の結合推定量

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}(\widetilde{\mathbf{\Theta}}^{ML}) = {} & [\boldsymbol{I}_m \otimes (\mathbf{\Sigma}_{11\cdot2}^{(1)})^{-1} + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\otimes(\mathbf{\Sigma}_{11\cdot2}^{(2)})^{-1}]^{-1} \\ & \times[\{\boldsymbol{I}_m\otimes(\mathbf{\Sigma}_{11\cdot2}^{(1)})^{-1}\}\mathrm{vec}(\widetilde{\mathbf{\Theta}}_1) + \{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\otimes(\mathbf{\Sigma}_{11\cdot2}^{(2)})^{-1}\}\mathrm{vec}(\boldsymbol{A}^{-1}\widetilde{\mathbf{\Theta}}_2)]\end{aligned}$$

のリスクを解析的に求めた．この推定量のリスクの値は, 最良の推定量のリスクの下限とみなすことができると思われる．

数値実験は, データの欠測状況を考慮しつつ, いくつかの設定の下で実験した．各設定は表に与えてある通りである．また表内の「改良率」とは, 推定量 $\widehat{\mathbf{\Theta}}^{GD}$ に対する推定量 $\widehat{\mathbf{\Theta}}^{ST}$ のリスクの改良の割合である．数値実験の結果をまとめると, 次のようになる:

1. $\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(2)}(\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(1)})^{-1}$ の各固有値が近い値をとる場合は, 改良率は大きくなる傾向がある. 今回の実験設定では, 最大で約 16%の改良が見込めることがわかった.
2. 逆に, $\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(2)}(\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(1)})^{-1}$ の各固有値が散らばっている場合には, 改良率は小さくなる.
3. 損失関数内の重み $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$ が単位行列のとき, 改良率が大きくなる (表 2).

参考文献

[1] Lin, S.P. and Perlman, M.D. (1985). A Monte Carlo comparisons of four estimators for a covariance matrix. In *Multivariate Analysis VI* (P.K. Krishnaiah, ed.) 411–429.

[2] Loh, W.L. (1991). Estimating the common mean of two multivariate normal distributions. *Ann. Statist.* **19**, 297–313.

[3] Sugiura, N. and Kubokawa, T. (1988). Estimating common parameters of growth curve models. *Ann. Inst. Statist. Math.* **40**, 119–135.

[4] Tsukuma, H. and Konno, Y. (2002). Alternative estimators of the common regression matrix in two GMANOVA models under weighted quadratic losses. Technical Reports of Mathematical Sciences, Chiba University, Vol.18, No. 12. (http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/report/content.html)

表 1. リスクの推定値

$$(\boldsymbol{N_1},\ \boldsymbol{N_2},\ \boldsymbol{p_1},\ \boldsymbol{p_2},\ \boldsymbol{m},\ \boldsymbol{q}) = (\mathbf{12},\ \mathbf{12},\ \mathbf{7},\ \mathbf{6},\ \mathbf{2},\ \mathbf{5})$$
$$\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\gamma_i} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{22}}^{(\boldsymbol{i})} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{p_i - q}}$$
$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \ \mathbf{diag}\,(\mathbf{1},\mathbf{1}), \quad \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C} = \ \mathbf{diag}\,(\mathbf{1},\mathbf{1})$$

$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{11\cdot 2}}^{(\mathbf{2})}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{11\cdot 2}}^{(\mathbf{1})})^{-\mathbf{1}}$	KW	GD	ST	改良率
diag $(1,1,1,1,1)$	10	17.767 (0.093)	15.175 (0.078)	14.6 %
diag $(100,100,10,1,1)$	10	18.129 (0.108)	16.687 (0.094)	7.9 %

表 2. リスクの推定値

$$(\boldsymbol{N_1},\ \boldsymbol{N_2},\ \boldsymbol{p_1},\ \boldsymbol{p_2},\ \boldsymbol{m},\ \boldsymbol{q}) = (\mathbf{12},\ \mathbf{12},\ \mathbf{7},\ \mathbf{6},\ \mathbf{2},\ \mathbf{5})$$
$$\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\gamma_i} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{22}}^{(\boldsymbol{i})} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{p_i - q}}$$
$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \ \mathbf{diag}\,(\mathbf{1/3},\mathbf{3}), \quad \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C} = \ \mathbf{diag}\,(\mathbf{1},\mathbf{1})$$

$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{11\cdot 2}}^{(\mathbf{2})}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{11\cdot 2}}^{(\mathbf{1})})^{-\mathbf{1}}$	KW	GD	ST	改良率
diag $(1,1,1,1,1)$	10.000	18.493 (0.111)	15.557 (0.091)	15.9 %
diag $(100,100,10,1,1)$	9.885	18.224 (0.121)	15.600 (0.092)	14.4 %