Estimation of normal covariance matrices parametrized by irreducible symmetric cones

今野 良彦[1]（日本女子大学理学部）

実ウィシャート分布のスケール行列母数の推定問題を Stein 損失のもとで考えたとき，経験共分散行列の固有根を shrinkage-expansion technique で修正することにより，直交不変ミニマックス推定量が得られることが知られている（[1] を参照）．本発表では，対称錐体上の一般化ウィシャート分布に対しても同様の結果が得られることを報告する．

実ベクトル空間 $\mathcal{V}$ は Euclidean Jordan 代数 (EJA と記す) であるとは， $\mathcal{V}$ 上にジョルダン積（単位元を e と書く）と呼ばれる双一次形式 $(a,\,b)\mapsto ab\,(\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathcal{V})$ があり，それがつぎの性質をもつときをいう：(i) 任意の $a,\,b\in\mathcal{V}$ に対して，$ab=ba$, (ii) 任意の $a,\,b\in\mathcal{V}$ に対して，$a(a^2b)=a^2(ab)$（ただし，$aa=a^2$ と書いた），(iii) 任意の $a,\,b,\,c\in\mathcal{V}$ に対して，$(a|\,bc)=(ab|\,c)$．ただし，$(a|\,b)$ は内積である．以下では，$\mathcal{V}$ は有限次元で単純（自明でないイデアルを持たない）とする．$\mathcal{V}$ は power associative algebra となり，元 $x\in\mathcal{V}$ の最小多項式の次数には最大値がある．これを $\mathcal{V}$ のランクという．以下では，$\mathcal{V}$ のランクを r，次元を v，Peirce invariant を g と書き，V の Jordan frame（直交原始的ベキ等元の組）$c_1,\,c_2,\,\ldots\,,\,c_r$ を一つ固定する．

Jordan 代数の意味での trace と determinant を det と det と記す．また，通常の trace と determinant を Det と Tr と書くことにする．以下では，内積を $(x|\,y)=\mathrm{tr}(xy)\,(x,\,y\in\mathcal{V})$ とする．各 $x\in\mathcal{V}$ に対して，左変換と 2 次変換を $L(x):\,y\mapsto xy\,(\mathcal{V}\to\mathcal{V})$ と $P(x):\,y\mapsto 2x(xy)-x^2y\,(\mathcal{V}\to\mathcal{V})$ で定める．次で定義された EJA の部分空間 $\mathcal{V}^+$ は対称錐体（等質で自己双対な開凸体）となる：$\mathcal{V}^+=\{x\in\mathcal{V}:\mathrm{Det}\{P(x)\}\neq 0\}$.

整数 N は $N>v/r$ とし，$r\geq 2$, $\sigma\in\mathcal{V}^+$ とする．確率変数 w は，母数 N と σ の一般化ウィシャート分布に従うとする：

$$f_{\mathcal{V}^+}(w|\,N,\,\sigma)=\frac{2^{-Nr}}{\Gamma_{\mathcal{V}^+}(N)}\det(\sigma)^{-N}\det(w)^{N-v/r}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma^{-1}|\,w)\right\},\qquad w\in\overline{\mathcal{V}^+}.$$

ただし，$\overline{\mathcal{V}^+}$ は $\mathcal{V}^+$ の閉包，$\Gamma_{\mathcal{V}^+}(s)=\underline{(2\pi)^{(v-r)/2}}\Pi_{j=1}^r\Gamma\big(s-\frac{g}{2}(j-1)\big)$ で $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である．この分布を $\mathcal{JW}_{\mathcal{V}^+}(N,\,\sigma)$ と記す．観測 w に基づいて σ の推定問題を損失関数 $\mathscr{L}(\widehat{\sigma},\,\sigma)=(\sigma^{-1}|\,\widehat{\sigma})-\log\det(\widehat{\sigma})+\log\det(\sigma)-r$ のもとで考える．

[1]email address: konno@fc.jwu.ac.jp

危険関数を $\mathscr{R}(\hat{\sigma}, \sigma) = \mathbb{E}[\mathscr{L}(\widehat{\sigma}, \sigma)]$ とする．ただし，$\widehat{\sigma}$ は σ の推定量で，期待値は $\mathcal{JW}_{\mathcal{V}^+}(N, \sigma)$ に関してである．

観測 w の乗数倍の推定量の中で最良のものは $(1/(2N))w$ となることがわかる．しかし，これは非許容的である．三角変換群（Frobenius 変換）不変で最良なものを構成することにより，このことは確認ができる．さらに，三角変換群不変で最良な推定量は定数リスクをもち，ミニマックスであることがわかる．

三角変換群不変で最良な推定量を改良することを次に考える．$\mathcal{V}^+$ の自己同型群の単位元連結成分を $\mathscr{G}$，$\mathcal{V}$ の直交群を $\mathscr{O}$，$\mathscr{K} = \mathscr{G} \cap \mathscr{O}$ とする．推定量の族

$$\widehat{\sigma}_\varphi = k \sum_{j=1}^{r} \varphi_j(\boldsymbol{a}) c_j \tag{1}$$

を考える．ただし，$w = ka,\, k \in \mathscr{K},\, a = \sum_{j=1}^r a_j c_j,\, a \in \{a = \sum_{j=1}^r a_j c_j : a_1 > a_2 > \cdots > a_r > 0\}$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ で，$\varphi_j(\boldsymbol{a})\,(j = 1, 2, \ldots, r)$ は偏微分可能な実数値関数である．以後は，$\varphi_j(\boldsymbol{a})$ を φ_j と書く．推定量 $\widehat{\sigma}_\varphi$ を評価するために次が有効である．

補題　w は $\mathcal{JW}_{\mathcal{V}^+}(N, \sigma)$ に従うとき，次式が成立する：

$$\mathbb{E}[(\sigma^{-1}|\,\widehat{\sigma}_\varphi)] \;=\; \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{r}\left\{2\frac{\partial\varphi}{\partial a_j} + \left(2N - \frac{2v}{r}\right)\frac{\varphi_j}{a_j} + 2g\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\varphi_i - \varphi_j}{a_i - a_j}\right\}\right].$$

注意　n を標本数（中心化された実または複素 r 変量正規分布からの標本）とする．$N = n/2,\, g = 1,\, v = r(r+1)/2$ とすれば，実ウィシャート分布に対する等式となり，$N = n,\, g = 2,\, v = r^2$ とすれば，複素ウィシャート分布に対する等式となる．

定理　推定量の族 (1) において，$\varphi_j = \{2N + g(r - 2j + 1)\}^{-1}\,(j = 1, 2, \ldots, r)$ とした推定量を $\widehat{\sigma}_m$ とする．このとき，次式が成立する：

$$\mathscr{R}(\widehat{\sigma}_m, \sigma) \le -\sum_{j=1}^{r}\log(2N + g(r - 2j + 1)) - \sum_{j=1}^{r}\mathbb{E}[\log u_j^2].$$

ただし，u_j^2 は自由度 $2N - g(j-1)$ のカイ自乗確率変数である．さらに，右辺は ミニマックスリスクである．

参考文献

[1] D.K. Dey, C. Srinivasan, Estimation of a covariance matrix under Stein's loss, *Ann. Statist.* **13** (1985) 1581-1591.

[2] J. Faraut, K. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford Science Publications (1994).

[3] Y. Konno, Estimation of normal covariance matrices parametrized by irreducible symmetric cones under Stein's loss, submitted (2005).