# Estimation of normal covariance matrices parametrized by irreducible symmetric cones

今野 良彦[1]（日本女子大学理学部）

実ウィシャート分布のスケール行列母数の推定問題を Stein 損失のもとで考えたとき，経験共分散行列の固有根を shrinkage-expansion technique で修正することにより，直交不変ミニマックス推定量が得られることが知られている（[1] を参照）．本発表では，対称錐体上の一般化ウィシャート分布に対しても同様の結果が得られることを報告する．

実ベクトル空間 $\mathcal{V}$ は Euclidean Jordan 代数 (EJA と記す) であるとは， $\mathcal{V}$ 上にジョルダン積（単位元を $e$ と書く）と呼ばれる双一次形式 $(a, b) \mapsto ab\,(\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathcal{V})$ があり，それがつぎの性質をもつときをいう：(i) 任意の $a, b \in \mathcal{V}$ に対して，$ab = ba$, (ii) 任意の $a, b \in \mathcal{V}$ に対して，$a(a^2b) = a^2(ab)$（ただし，$aa = a^2$ と書いた），(iii) 任意の $a, b, c \in \mathcal{V}$ に対して，$(a|\,bc) = (ab|\,c)$．ただし，$(a|\,b)$ は内積である．以下では，$\mathcal{V}$ は有限次元で単純（自明でないイデアルを持たない）とする．$\mathcal{V}$ は power associative algebra となり，元 $x \in \mathcal{V}$ の最小多項式の次数には最大値がある．これを $\mathcal{V}$ のランクという．以下では，$\mathcal{V}$ のランクを $r$，次元を $v$，Peirce invariant を $g$ と書き，V の Jordan frame（直交原始的ベキ等元の組）$c_1, c_2, \dots, c_r$ を一つ固定する．

Jordan 代数の意味での trace と determinant を tr と det と記す．また，通常の trace と determinant を Tr と Det と書くことにする．以下では，内積を $(x|\,y) = \mathrm{tr}(xy)\,(x, y \in \mathcal{V})$ とする．各 $x \in \mathcal{V}$ に対して，左変換と 2 次変換を $L(x): y \mapsto xy\,(\mathcal{V}\to\mathcal{V})$ と $P(x): y \mapsto 2x(xy) - x^2y\,(\mathcal{V}\to\mathcal{V})$ で定める．次で定義された EJA の部分空間 $\mathcal{V}^+$ は対称錐体（等質で自己双対な開凸体）となる：$\mathcal{V}^+ = \{x \in \mathcal{V} : \mathrm{Det}\{P(x)\} \neq 0\}$.

整数 $N$ は $N > v/r$ とし，$r \geq 2$，$\sigma \in \mathcal{V}^+$ とする．確率変数 $w$ は，母数 $N$ と $\sigma$ の一般化ウィシャート分布に従うとする：

$$f_{\mathcal{V}^+}(w|\,N, \sigma) = \frac{2^{-Nr}}{\Gamma_{\mathcal{V}^+}(N)}\det(\sigma)^{-N}\det(w)^{N-v/r}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma^{-1}|\,w)\right\}, \qquad w \in \overline{\mathcal{V}^+}.$$

ただし，$\overline{\mathcal{V}^+}$ は $\mathcal{V}^+$ の閉包，$\Gamma_{\mathcal{V}^+}(s) = \underline{(2\pi)^{(v-r)/2}}\Pi_{j=1}^{r}\Gamma\big(s - \frac{g}{2}(j-1)\big)$ で $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である．この分布を $\mathcal{JW}_{\mathcal{V}^+}(N, \sigma)$ と記す．観測 $w$ に基づいて $\sigma$ の推定問題を損失関数 $\mathscr{L}(\widehat{\sigma}, \sigma) = (\sigma^{-1}|\,\widehat{\sigma}) - \log\det(\widehat{\sigma}) + \log\det(\sigma) - r$ のもとで考える．

---
[1]email address: konno@fc.jwu.ac.jp

危険関数を $\mathscr{R}(\hat{\sigma},\sigma)=\mathbb{E}[\mathscr{L}(\widehat{\sigma},\sigma)]$ とする．ただし，$\widehat{\sigma}$ は $\sigma$ の推定量で，期待値は $\mathcal{JW}_{\mathcal{V}^+}(N,\sigma)$ に関してである．

観測 $w$ の乗数倍の推定量の中で最良のものは $(1/(2N))w$ となることがわかる．しかし，これは非許容的である．三角変換群（Frobenius 変換）不変で最良なものを構成することにより，このことは確認ができる．さらに，三角変換群不変で最良な推定量は定数リスクをもち，ミニマックスであることがわかる．

三角変換群不変で最良な推定量を改良することを次に考える．$\mathcal{V}^+$ の自己同型群の単位元連結成分を $\mathscr{G}$，$\mathcal{V}$ の直交群を $\mathscr{O}$，$\mathscr{K}=\mathscr{G}\cap\mathscr{O}$ とする．推定量の族

$$\widehat{\sigma}_\varphi = k\sum_{j=1}^{r}\varphi_j(\boldsymbol{a})c_j \tag{1}$$

を考える．ただし，$w=ka,\ k\in\mathscr{K},\ a=\sum_{j=1}^{r}a_jc_j,\ a\in\{a=\sum_{j=1}^{r}a_jc_j:\ a_1>a_2>\cdots>a_r>0\},\ \boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_r)$ で，$\varphi_j(\boldsymbol{a})\ (j=1,2,\ldots,r)$ は偏微分可能な実数値関数である．以後は，$\varphi_j(\boldsymbol{a})$ を $\varphi_j$ と書く．推定量 $\widehat{\sigma}_\varphi$ を評価するために次が有効である．

**補題**　$w$ は $\mathcal{JW}_{\mathcal{V}^+}(N,\sigma)$ に従うとき，次式が成立する：

$$\mathbb{E}[(\sigma^{-1}|\,\widehat{\sigma}_\varphi)] \;=\; \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{r}\left\{2\frac{\partial\varphi}{\partial a_j}+\left(2N-\frac{2v}{r}\right)\frac{\varphi_j}{a_j}+2g\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\varphi_i-\varphi_j}{a_i-a_j}\right\}\right].$$

**注意**　$n$ を標本数（中心化された実または複素 $r$ 変量正規分布からの標本）とする．$N=n/2,\ g=1,\ v=r(r+1)/2$ とすれば，実ウィシャート分布に対する等式となり，$N=n,\ g=2,\ v=r^2$ とすれば，複素ウィシャート分布に対する等式となる．

**定理**　推定量の族 (1) において，$\varphi_j=\{2N+g(r-2j+1)\}^{-1}a_j\ (j=1,2,\ldots,r)$ とした推定量を $\widehat{\sigma}_m$ とする．このとき，次式が成立する：

$$\mathscr{R}(\widehat{\sigma}_m,\sigma)\le\sum_{j=1}^{r}\log(2N+g(r-2j+1))-\sum_{j=1}^{r}\mathbb{E}[\log u_j^2].$$

ただし，$u_j^2$ は自由度 $2N-g(j-1)$ のカイ自乗確率変数である．さらに，右辺は ミニマックスリスクである．

## 参考文献


[1] D.K. Dey, C. Srinivasan, Estimation of a covariance matrix under Stein's loss, *Ann. Statist.* **13** (1985) 1581-1591.

[2] J. Faraut, K. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford Science Publications (1994).

[3] Y. Konno, Estimation of normal covariance matrices parametrized by irreducible symmetric cones under Stein's loss, submitted (2005).