Estimation of normal covariance matrices by irreducible symmetric cones

日本女子大学・理学部　今野 良彦

(2006年03月29日)

背景１　**実ウィシャート分布のスケール行列母数の推定問題を** Stein **損失のもとで考えたとき，経験共分散行列の固有根を** shrinkage-expansion technique **で修正することにより，直交不変ミニマックス推定量が得られることが知られている．**[1] **を参照．**

背景２　**実ウィシャート分布の一般化**

(a) **対称凸錐体（自己双対 ＋ 等質）上のウィシャート分布** [2]**：** Real Wishart, Complex Wishart, Quanternion Wishart, Lorentz Wishart

(b) **等質凸錐体上のウィシャート分布**

Andersson and Wojnar (2004)**，** Andersson and Perlman (1993) **の** LCI **モデル**

目的　**背景** 1 **の結果をどこまで拡張できるか？**

結果　Euclidean Jordan **代数を用いて，**(a) **に対して背景１の結果を拡張できる！**

三角変換群不変の最良推定量， SURE **法**

Euclidean Jordan 代数の用語

- $\mathcal{V}$:　有限次元実ベクトル空間
- ジョルダン積 $(a, b) \mapsto ab\,(\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V})$
  - $ab = ba$　（可換律）（注：単位元を e と書く）
  - $a(a^2b) = a^2(ab)$　（結合律は成立しない！）
  - $(a|\,bc) = (ab|\,c)$．ただし，$(a|\,b)$ は内積
- $\mathcal{V}$ は有限次元で単純とする．
- r と v：$\mathcal{V}$ のランクと次元
- g：Peirce invariant　　（注）$v = r + \frac{g}{2}r(r-1)$

  $g = 1,\ v = \frac{r(r+1)}{2}$ のとき，$r \times r$ 実対称行列，

  $g = 2,\ v = r^2$ のとき，　$r \times r$ エルミート行列
- $c_1, c_2, \ldots, c_r$: $\mathcal{V}$ の Jordan frame
- tr と det: Jordan 代数の意味での trace と determinant　（注）$\mathrm{tr}(xy) = (x|\,y)$ とする
- 対称凸錐体 $\mathcal{V}^+ = \{x^2 : x \in \mathcal{V},\ \det(x) \neq 0\}$

$\mathcal{V}^+$ 上のウィシャート分布

$N > \frac{v}{r}$, $r \geq 2$, $\sigma \in \mathcal{V}^+$ のとき，$w \in \overline{\mathcal{V}^+}$

$$f_{\mathcal{V}^+}(w|\, N,\, \sigma) \\ = \text{constant}\ \frac{\det(w)^{N-v/r}}{\det(\sigma)^N} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma^{-1}|\, w)\right\}$$

- Real Wishart $(g = 1,\ v = r(r+1)/2)$
- Complex Wishsrt $(g = 2,\ v = r^2)$

$w \sim \mathcal{IW}_{\mathcal{V}^+}(N,\, \sigma)$ とかく.（注）$\mathbb{E}[w] = 2N\sigma$

損失関数　σ の推定量 $\hat{\sigma}$ に対して

$$\mathscr{L}(\hat{\sigma},\, \sigma) = (\sigma^{-1}|\, \hat{\sigma}) - \log\det(\hat{\sigma}) + \log\det(\sigma) - r$$

リスク関数　$\mathscr{R}(\hat{\sigma},\, \sigma) = \mathbb{E}[\mathscr{L}(\hat{\sigma},\, \sigma)]$

結果 1　w の乗数倍で最良のものは $(1/(2N))w$

結果 2　三角変換群（Frobenius 変換）不変で最良なものを構成でき，そのリスク関数は

$$\sum_{j=1}^{r} \log(2N + g(r - 2j + 1)) - \sum_{j=1}^{r} \mathbb{E}[\log u_j^2].$$

ただし，$u_j^2 \sim \chi^2_{2N-g(j-1)}$.

主な結果

$\mathscr{K}=\mathscr{G}\cap\mathscr{O}$．ただし，$\mathscr{G}$ は $\mathcal{V}^+$ の自己同型群の単位元連結成分，$\mathscr{O}$ は $\mathcal{V}$ の直交群．

推定量の族　$\widehat{\sigma}_\varphi=k\sum_{j=1}^r\varphi_j(a)c_j$ を考える．ただし，$w=ka$, $k\in\mathscr{K}$, $a=\sum_{j=1}^r a_jc_j$ で $a_1>\cdots>a_r>0$，$\varphi_j(a)\ (j=1,2,\dots,r)$ は偏微分可能な実数値関数である．

補題 1　$\varphi_j:=\varphi_j(a)$ と記す．

$$\mathbb{E}[(\sigma^{-1}|\,\widehat{\sigma}_\varphi)]=\mathbb{E}\Bigg[\sum_{j=1}^r\Bigg\{2\frac{\partial\varphi_j}{\partial a_j}+\left(2N-\frac{2v}{r}\right)\frac{\varphi_j}{a_j}+2g\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\varphi_i-\varphi_j}{a_i-a_j}\Bigg\}\Bigg].$$

定理 2　$\varphi_j(a)=\{2N+g(r-2j+1)\}^{-1}a_j$ とする．このとき，

$$\mathscr{R}(\widehat{\sigma}_\varphi,\sigma)\le\sum_{j=1}^r\log(2N+g(r-2j+1))-\sum_{j=1}^r\mathbb{E}[\log u_j^2].$$

ただし，$u_j^2\sim\chi^2_{2N-g(j-1)}$．