

「計算代数統計の展開」RIMS 研究集会

(2006 年 11 月 6 日 – 10 日)

対称錐上のウィシャートモデル に対する推定問題 (修正版)

日本女子大学・理学部 今野 良彦²

¹修正版 : <http://mp-w3math.jwu.ac.jp/~konno/pdf/talk23.pdf>

²email: konno@fc.jwu.ac.jp

home page: <http://mp-w3math.jwu.ac.jp/~konno/index.html>

背景 1 Real Wishart モデル [50] (1928 生まれ) の一般化 :

- (a) 対称錐 (自己双対 + 等質) 上の Wishart 分布 ([9, 35]) via Euclidean Jordan 代数 [15] : Real Wishart, Complex Wishart [1], Quaternions Wishart [2], Lorentz Wishart [48].
- (b) 等質錐上の Wishart 分布: Andersson and Wojnar [6].
- (c) Lattice conditionally independence models (LCI モデルと書く) [5, 3].

背景 2 Real Wishart 分布のスケール行列母数の推定問題を Stein 損失のもとで考えたとき , 経験共分散行列の固有根を shrinkage-expansion technique で修正することにより , 直交不変ミニマックス推定量が得られることが知られている . [12, 22, 44] を参照 .

Question 背景 2 の結果をどこまで拡張できるか ?

結果 Euclidean Jordan 代数を用いて (a) へ背景 2 の結果を拡張 [26].

発表の内容

- Real Wishart 分布の固有根の分布について (背景 2 の問題意識) .
- 対称錐と等質錐について.
- Euclidean Jordan 代数 (以下では , EJA と記す) との遭遇.
- EJA の (あやしげな) 紹介.
- 対称錐上の Wishart models とその性質について.
- Decision-Theoretic approach to estimation problems on the generalized Wishart models.
- まとめにかえて : Boyond Muirhead[38].

Real Wishart 分布の固有根の分布

$r \times r$ の正値対称行列 $W \sim W_r(n, \Sigma)$ ($\Sigma > 0$) の固有根を $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ とする。 W/n は Σ の不偏推定量。

しかし, W/n の固有根 $(\lambda_1/n, \dots, \lambda_r/n)$ は Σ の固有根のバイアス推定量となる!

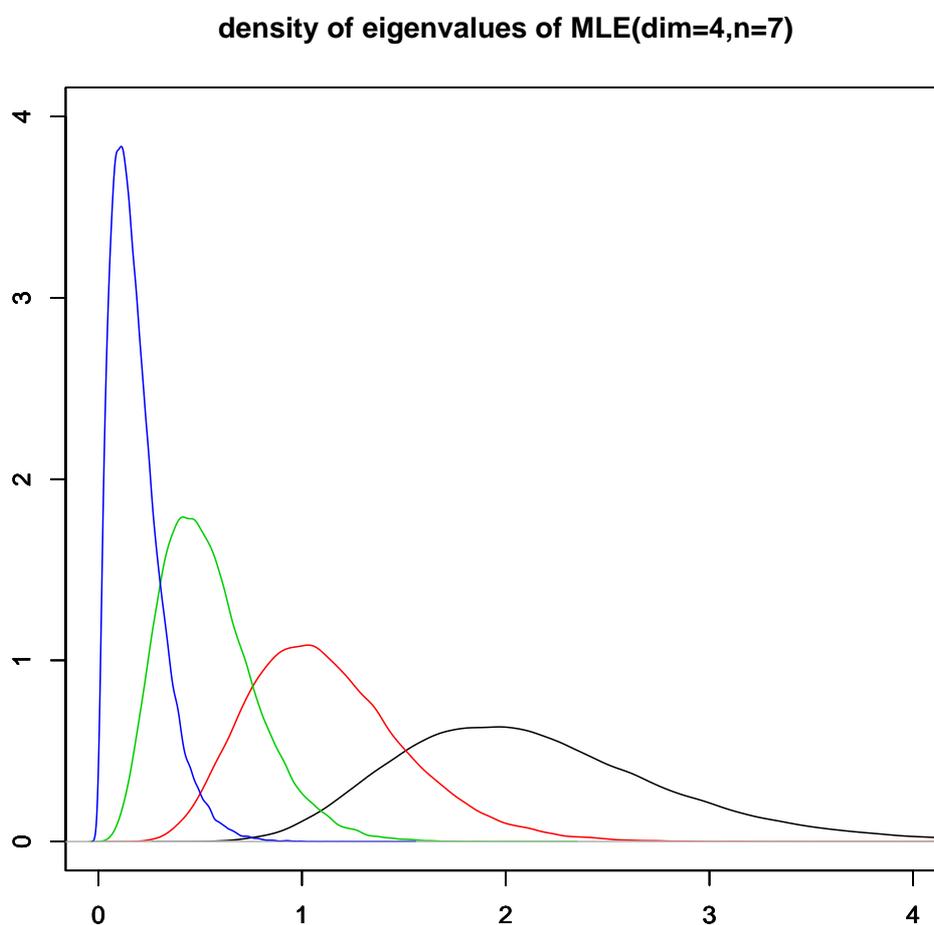


図 1: シミュレーションによる $(\lambda_1, \dots, \lambda_4)/7$ の確率密度関数 ($r = 4, n = 7$) の作図.

Marčenko and Pastur law[7] を参照 . $r = r(n)$

とし , $r/n \rightarrow \tau \leq 1 (n \rightarrow \infty)$ のとき ,

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \mathbb{1}_{\lambda_i \leq x} \rightarrow \int_{-\infty}^x \frac{\sqrt{(b-t)(t-a)}}{2\pi t\tau} \mathbb{1}_{a \leq t \leq b} dt$$

(almost surely).

ただし , $a = (1 - \tau^{1/2})^2$, $b = (1 + \tau^{1/2})^2$.

[44] の Lecture 4 を参照 .

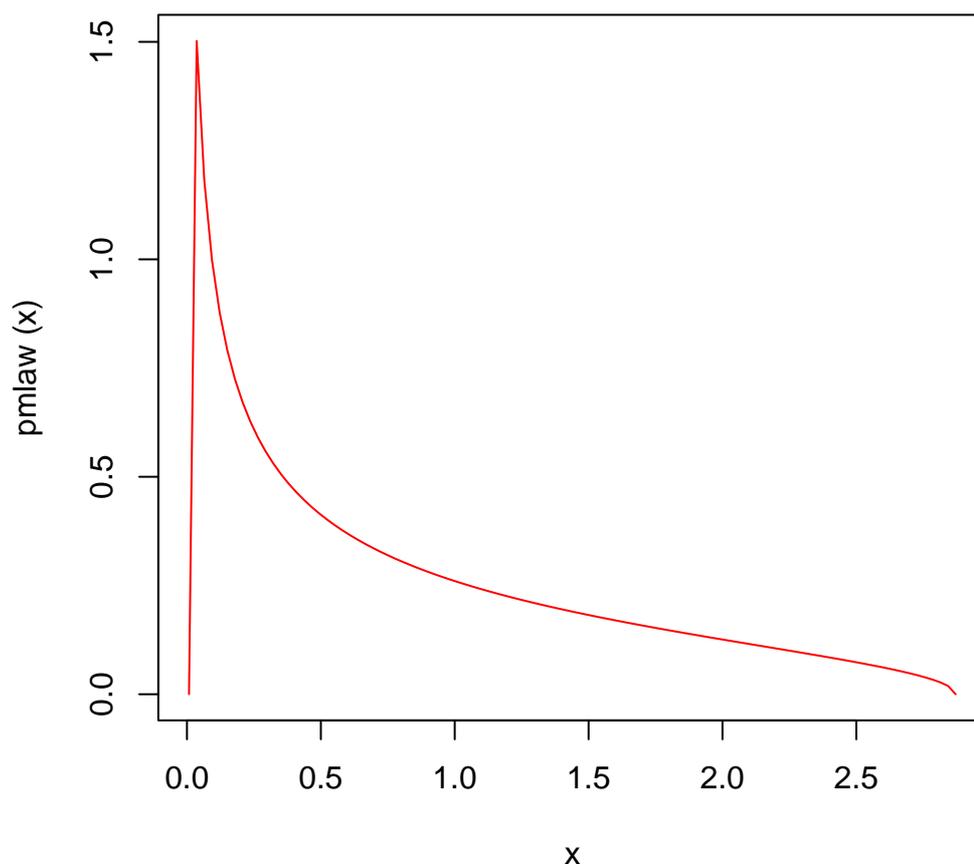


図 2: Density of Marčenko-Pastur's quarter-circle law($\tau = 4/7 \doteq 0.57$, $a \doteq 0.06$, $b \doteq 3.086$).

対称錐と等質錐について [15, 52] を参照 .

★ \mathcal{V} を \mathbb{R} 上の有限次元ベクトル空間とし , 内積を $(\cdot | \cdot)$ と書く .

★ $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$ が凸錐であるとは , (1) $\forall x \in \mathcal{C}, \lambda > 0 \implies \lambda x \in \mathcal{C}$ (2) \mathcal{C} は凸集合 .

★ \mathcal{C} が開 (閉) 集合のとき , 開 (閉) 凸錐という .

★ 開凸錐が直線 (entire line) をふくまないとき , 正則 (proper) 凸錐という .

★ 正則凸錐 \mathcal{C} とその閉包 $\bar{\mathcal{C}}$ に対して , 双対凸錐を

$$\mathcal{C}^* := \{x \mid (y \mid x) > 0, y \in \bar{\mathcal{C}} \setminus \{0\}\}.$$

—— 自己双対 ——

$$\mathcal{C}^* = \mathcal{C}.$$

★ 正則凸錐 \mathcal{C} の線型自己同型群

$$\mathcal{G}(\mathcal{C}) := \{G \in \text{GL}(\mathcal{V}) \mid G\mathcal{C} = \mathcal{C}\}.$$

★ 正則凸錐 \mathcal{C} が等質であるとは , $\forall x, y \in \mathcal{C}$ に対して ,
 $y = Sx$ (線型写像 $\exists S \in \mathcal{G}(\mathcal{C})$).

—— 対称錐 ——

$$\text{等質錐} + \text{自己双対凸錐} = \text{対称錐}.$$

例 1 $r \times r$ の正定置行列の全体 $\text{Sym}^+(r, \mathbb{R})$ は対称錐 . □

★ $\text{GL}(r, \mathbb{R})$ の $\text{Sym}^+(r, \mathbb{R})$ への作用 (変換) を

$$\text{GL}(r, \mathbb{R}) \times \text{Sym}^+(r, \mathbb{R}) \quad (g, x) \mapsto gxg'.$$

ただし, g' は g の転置.

★ 作用は推移的である: 任意の $x, y \in \text{Sym}^+(r, \mathbb{R})$ に対して, ある $g \in \text{GL}(r, \mathbb{R})$ が存在して, $x = gyg'$.

$$\text{等質錐} \supset \text{対称錐} \supset \text{Sym}^+(r, \mathbb{R}).$$

注意 1 等質だが自己双対ではない例は [15] の page 21 を参照 . □

Encounter of Euclidean Jordan algebras

- Tolver Jensen [48] — 多変量正規分布の共分散行列と共分散行列の逆行列について線型な仮説は real, complex, quaternion structures or Lorentz cone により表現されるモデルの積となる .
- Massam and Neher [36] — Lattice conditionally independence models [5] (LCI モデルと書くことにする) の EJA を用いた拡張.

注意 2 LCI モデルの定める錐体 (AP cone) は推移的に作用するある線型群をもつ .

- J. Faraut, K. Korányi [15] — user-friendly textbook on symmetric cones (伊師氏の書評・「数学」第 58 巻 (2006) 第 2 号を参照) .

注意 3 対称錐と EJA の代数構造は密接に関係しているので , EJA を用いた直接計算により対称錐に関わる結果が明示的かつ精緻に表現できる !

Euclidean Jordan 代数とは [15] を参照 .

★ \mathcal{V} : 有限次元実ベクトル空間 とし , 内積を $(\cdot|\cdot)$.

—— ジョルダン積 ——

$(x, y) \mapsto x \circ y$ ($\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$) は以下をみたす .

★ $x \circ y = y \circ x$ (可換律) (注: 単位元を e と書く)

★ $x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y)$ (結合律は成立しない!).

★ $(x|z \circ y) = (z \circ x|y)$.

ただし , $x^2 = x \circ x$ と書いた .

注意 4 \mathcal{V} は power-associative, i.e., $x^p \circ x^q = x^{p+q}$ ($\forall a \in \mathcal{V}, p, q$ は非負の整数) .

例 2 $\mathcal{V} = \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ とする . このとき

$$X \circ Y = \frac{XY + YX}{2}, \quad \forall X, Y \in \text{Sym}(r, \mathbb{R}).$$

例 3 $\mathcal{V} = \mathbb{R} \times \mathcal{W}$ とする . ただし , \mathcal{W} は有限次元実ベクトル空間 ($\dim \mathcal{W} \geq 2$) とし , B を \mathcal{W} 上の内積とする . このとき , $(\alpha, \mathfrak{a}), (\beta, \mathfrak{b}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{W}$ に対して ,

$$(\alpha, \mathfrak{a}) \circ (\beta, \mathfrak{b}) = (\alpha\beta + B(\mathfrak{a}|\mathfrak{b}), \alpha\mathfrak{b} + \beta\mathfrak{a}).$$

EJA の用語と性質 [15] を参照 .

★ $x \in \mathcal{V}$ に対して , ある正の整数 $m(x)$ が存在して ,

$m(x) = \min\{k > 0 : e, x, x^2, \dots, x^k \text{ は線型独立}\}.$
 \mathcal{V} のランク

$$r = \max\{m(x) : x \in \mathcal{V}\}.$$

注意 5 (1) 集合 $\{x \in \mathcal{V} : m(x) = r\}$ は 開かつ稠密 .

(2) $m(x) = r$ なる x に対して , minimal polynomial

$$f(\lambda; x) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + a_2(x)\lambda^{r-2} + \dots \\ + (-1)^r a_r(x)$$

が存在し , j 次の斉次多項式関数 a_j は unique . \square

$$x \in \mathcal{V} \text{ の trace と determinant} \\ \text{tr}(x) = a_1(x), \quad \det(x) = a_r(x).$$

例 4 (例 3 の続き) $\mathcal{V} = \mathbb{R} \times \mathcal{W}$ とする . ただし , \mathcal{W} は有限次元実ベクトル空間とし , B を \mathcal{W} 上の内積とする . このとき , $x = (\chi, \mathbb{x}) \in \mathcal{V}$ に対して , $x^2 - 2\chi x + (\chi^2 - B(\mathbb{x}|\mathbb{x}))e = 0$ ($e = (1, \mathbb{0})$) から $\text{rank}(\mathcal{V}) = 2$, $\text{tr}(x) = 2\chi$, $\det(x) = \chi^2 - B(\mathbb{x}|\mathbb{x})$.

注意 6 対称双線型形式 $(x, y) \mapsto \text{tr}(x \circ y)$ は正定置である .

EJA の意味での \mathcal{V} の内積

$$(x|y) = \text{tr}(x \circ y).$$

$x \in \mathcal{V}$ の逆元

x が可逆であるとは , ある元 $y \in \mathbb{R}[x]$ が存在して , $x \circ y = e$ となるときをいう . これを x^{-1} と書く . ただし , $\mathbb{R}[x]$ は e, x で生成される \mathcal{V} の subalgebra.

注意 7 一般に , $a, b \in \mathcal{V}$ に対して , $\det(a \circ b) \neq \det(a)\det(b)$. しかし , $a, b \in \mathbb{R}[x]$ に対して , $\det(a \circ b) = \det(a)\det(b)$, $\text{tr}(e) = \text{rank}(\mathcal{V})$, $\det(e) = 1$.

注意 8 $\mathcal{V} = \text{Sym}(2, \mathbb{R})$ とし ,

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$x \circ y = e$. しかし , $t \neq 0$ のとき , $y \notin \mathbb{R}[x]$.

\mathcal{V} の 2 次表現 $P(x) := 2L(x)^2 - L(x^2)$. ただし , $L(x)y := xy$.

例 5 $\mathcal{V} = \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ とする . このとき , $X, Y \in \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ に対して ,

$$XYX = 2X \circ (X \circ Y) - X^2 \circ Y = P(X)Y. \quad \square$$

★ $\mathcal{V}^\times = \{x \in \mathcal{V} : x \text{ は可逆}\}$ とおく .

—— \mathcal{V}^\times の特徴付け ——

$$x \in \mathcal{V}^\times \iff \det(x) \neq 0 \iff \text{Det}P(x) \neq 0.$$

—— 対称錐体 ——

$$\mathcal{C} := \{x^2 : x \in \mathcal{V}^\times\}.$$

★ \mathcal{V} を単純 (自明でないイデアルを持たない) とする .

以後の議論では \mathcal{V} を単純と仮定 .

Jordan frame c_1, c_2, \dots, c_r は 0 でないベキ等元の完全直交系 . すなわち , $c_i^2 = c_i, c_i \circ c_j = 0 (i \neq j), c_1 + c_2 + \dots + c_r = e.$

$x \in \mathcal{V}$ のスペクトル分解 Jordan frame $c_1, c_2, \dots, c_k (k \leq r)$ と 0 でない実数 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ が存在して ,

$$x = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_k c_k$$

と一意的に表現できる .

例 6 (例 4 の続き) $\mathcal{V} = \mathbb{R} \times \mathcal{W}$ ($e = (1, \mathbb{0})$) とする。ただし, \mathcal{W} は有限次元実ベクトル空間とし, B を \mathcal{W} 上の内積とする。いま, $x = (\chi, \mathbb{x}) \in \mathcal{V}$ に対して, $\mathfrak{h} := \mathbb{x} / \sqrt{B(\mathbb{x}|\mathbb{x})}$ ($\mathbb{x} \neq \mathbb{0}$) と書く。このとき,

$$c_1 := (1/2)(1, \mathfrak{h}), \quad c_2 := (1/2)(1, -\mathfrak{h}),$$

$$\lambda_1 := \chi + \sqrt{B(\mathbb{x}|\mathbb{x})}, \quad \lambda_2 := \chi - \sqrt{B(\mathbb{x}|\mathbb{x})}$$

で $x = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$ 。さらに,

$$\text{tr}(x) = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \det(x) = \lambda_1 \lambda_2.$$

□

注意 9 $\det(x) \neq 0$ なる $x \in \mathcal{V}$ のスペクトル分解 $x = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_r c_r$ に対して,

$$\text{tr}(x) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r, \quad \det(x) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_r.$$

Peirce 分解 $\text{rank } \mathcal{V} = r$ とし, Jordan frame $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ を固定する. $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ に対して,

$$\mathcal{V}_{ii} := \{x \in \mathcal{V} : x \circ c_i = x\} = \mathbb{R}c_i,$$

$$\mathcal{V}_{ij} := \{x \in \mathcal{V} : x \circ c_i = (1/2)x = x \circ c_j\} \quad (i < j).$$

このとき,

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i \leq j} \mathcal{V}_{ij}, \quad \dim \mathcal{V}_{ij} = g \quad (i < j).$$

注意 10 (1) g を the Peirce invariant という.

(2) \mathcal{V} を単純 (自明でないイデアルを持たない), $\dim \mathcal{V} = v$, $\text{rank } \mathcal{V} = r$ としたとき, 次を含む 5 つ場合と同型.

$v = r + \frac{g}{2}r(r-1)$			
\mathcal{V}	$\dim \mathcal{V}$	$\text{rank } \mathcal{V}$	g
$\text{Sym}(r, \mathbb{R})$	$\frac{1}{2}r(r+1)$	r	1
$\text{Herm}(r, \mathbb{C})$	r^2	r	2
$\text{Herm}(r, \mathbb{H})$	$r(2r-1)$	r	4
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{v-1}$	v	2	$v-2$

Frobenius 変換 ベキ等元 c (原始的でなくともよい)

と $z \in \{x \in \mathcal{V} : c \circ z = (1/2)z\}$ に対して,

$$\tau_c(z) := \exp\{L(z) + 2L(z)L(c) - 2L(c)L(z)\}.$$

ただし, 写像 A に対して, $\exp(A) = \sum_{j=1}^{\infty} A^j/j!$.

例 7 $\mathcal{C} = \{x^2 : x \in \text{Sym}^\times(r, (\mathbb{R}))\}$ とし, $p = p_1 + p_2$ とする. $c = \begin{pmatrix} I_{p_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ とし,

$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & 0 \end{pmatrix}, \\ x_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{11} : p_1 \times p_1 \end{aligned}$$

とおき, x_1^{-1} を $P(c)\mathcal{V}$ における逆元とする.

$$(1) \quad x_0 - P(x_{12})x_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \end{pmatrix}.$$

(2) $Y = -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}$ と書いたとき,

$$\begin{aligned} \tau_c(-x_{12})x &= \begin{pmatrix} I_{p_1} & 0 \\ Y & I_{p_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p_1} & Y' \\ 0 & I_{p_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

変換群 [15, 26] を参照 .

実対称行列の場合 (1) 三角群の作用で不変な推定量のクラス . 実対称行列 S は , 実上三角行列 U を用いて , $S = UU'$ とかけた .

(2) 直交群の作用で不変な推定量のクラス . SVD を行う .

↓

一般化 !

用語 (1) $GL(\mathcal{V})$ を \mathcal{V} の一般線型群 .

(2) \mathcal{G} を \mathcal{C} の自己同型群 $\{g \in GL(\mathcal{V}) : g(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}$ の単位元の連結成分とする .

(3) $\mathcal{K} = \mathcal{G} \cap \mathcal{O}(\mathcal{V})$. ただし , $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ は \mathcal{V} の直交群 .

(4) \mathcal{V} の Jordan frame c_1, c_2, \dots, c_r , ($\text{rank } \mathcal{V} = r$)

を固定し , $x \in \mathcal{V}$ に対し ,

$$x = \sum_{i=1}^r x_i c_i + \sum_{i < j} x_{ij},$$

$$x_{ij} \in \mathcal{V}_{ij} = \{x \in \mathcal{V} : x \circ c_i = x \circ c_j = (1/2)x\}.$$

三角群 (1) $x \in \mathcal{V}$ によらない $\lambda_{ij} > 0$ について, \mathcal{G} の元 T で

$$(Tx)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } (i, j) < (k, \ell), \\ \lambda_{ij}x_{ij} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

となるものの全体を \mathcal{T} と書く. ただし, $\{(i, j) : 1 \leq i, j \leq r\}$ には辞書式順序をいれた. \square

(2) $\mathcal{U}_+ = \{u = \sum_{i=1}^r u_i c_i + \sum_{i < j} u_{ij} \in \mathcal{V} : u_i > 0, u_{ij} \in \mathcal{V}_{ij}\}$ とおく.

三角群の元の母数化

$u \in \mathcal{U}_+$ に対して,

$$T(u) = P(b_1)\tau_{c_1}(u^{(1)})P(b_2)\tau_{c_2}(u^{(2)}) \times \cdots \\ \times \tau_{c_{r-1}}(u^{(r-1)})P(b_r).$$

ただし, $u^{(j)} = \sum_{k=j+1}^r u_{jk} c_k$ と $b_j = c_1 + \cdots + c_{j-1} + u_j c_j + c_{j+1} + \cdots + c_r$.

注意 1 1 (1) 写像 $u \mapsto T(u)$ は \mathcal{U}_+ から \mathcal{T} への全単射.

$$(2) \det(x)^{-v/r} dx = 2^r \prod_{j=1}^r u_j^{-g(j-1)-1} du.$$

ただし, $dx = \prod_{i=1}^r dx_i \prod_{i < j} d(\sqrt{2}x_{ij})$.

(3) $x = T(u) \sum_{j=1}^r a_j c_j$ の Peirce 分解を

$$x = \sum_{j=1}^r x_j c_j + \sum_{j < k} x_{jk}$$

とする. ただし, $a_j > 0$, $x_{ik} \in \mathcal{V}_{jk}$. このとき,

補題 1 [15, 26]

$$x_j = a_j u_j^2 + (1/2) \sum_{k=1}^{j-1} a_k \|u_{kj}\|^2,$$

$$x_{jk} = a_j u_j u_{jk} + 2 \sum_{\ell=1}^{j-1} a_\ell u_{\ell j} u_{\ell k},$$

$$\text{tr}(x) = \sum_{j=1}^r a_j u_j^2 + (1/2) \sum_{j=1}^r \sum_{k=j+1}^r a_j \|u_{jk}\|^2.$$

ただし $\|\cdot\|$ は Euclidean norm. □

— V の極分解 —

$x \in \mathcal{V}$ に対して,

$$x = Ka, \quad K \in \mathcal{K}, \quad a \in \mathbb{R}_{\geq}^r.$$

ただし,

$$\mathbb{R}_{\geq}^r = \left\{ a = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \right\}.$$

注意 1 2 $dx \propto dK da_1 \dots da_r.$

— 積分公式 —

f を \mathcal{V} 上の可積分関数とする. このとき,

$$\int_{\mathcal{V}} f(x) dx \propto \int_{\mathcal{K} \times \mathbb{R}_{\geq}^r} f(Ka) \prod_{i < j} (a_i - a_j)^g dK da_1 \dots da_r.$$

ただし, $dx = \prod_{i=1}^r dx_i \prod_{i < j} d(\sqrt{2}x_{ij})$, dK は \mathcal{K} 上の Haar 測度.

ガンマ関数と一般化された Wishart 分布 [15] を参照 .

$$\star c^{(j)} = c_1 + \cdots + c_j \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

$$\star \mathcal{V}^{(j)} = \{x \in \mathcal{V} : x \circ c^{(j)} = x\}.$$

$\star \Delta_j(x)$ を $\mathcal{V}^{(j)}$ での principal minor . 特に , $\Delta_r(x) = \det(x)$.

$\star s = (s_1, s_2, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して ,

$$\Delta_s(x) = \Delta_1(x)^{s_1-s_2} \Delta_2(x)^{s_2-s_3} \cdots \Delta_r(x)^{s_r}.$$

———— \mathcal{C} 上のガンマ関数 ————

$\text{Re}(s_i) > (i-1)g/2$ ($i = 1, 2, \dots, r$) のとき ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{C}}(s) &= \int_{\mathcal{C}} e^{-\text{tr}(x)} \Delta_s(x) \Delta_r(x)^{-v/r} dx \\ &= (2\pi)^{(n-r)/2} \prod_{i=1}^r \Gamma\left(s_j - (j-1)\frac{g}{2}\right). \end{aligned}$$

ただし , $r = \text{rank } \mathcal{V}$, $v = \dim \mathcal{V}$, g は Peirce invariant
 $dx = \prod_{i=1} dx_i \prod_{i < j} d(\sqrt{2}x_{ij})$.

注意 1 3 (1) $s = (s, \dots, s)$ のとき , $\Gamma_{\mathcal{C}}(s) := \Gamma_{\mathcal{C}}(s)$.

(2) \mathcal{C} 上のベータ関数.

(3) \mathcal{C} 上の zonal polynomials: $Z_{\mathfrak{m}}(x) \propto \int_{\mathcal{K}} \Delta_{\mathfrak{m}}(Kx) dK$.

ただし , $x \in \mathcal{C}$, $\mathfrak{m} \in \mathbb{N}^r$ ($m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq 0$).

[15, 20, 30] を参照 .

□

— \mathcal{C} 上のウィシャート分布 —

$N > \frac{v}{r} - 1, r \geq 2, \sigma \in \mathcal{C}$ のとき, $w \in \bar{\mathcal{C}}$

$$f_{\mathcal{C}}(w | N, \sigma) \propto \frac{\det(w)^{N-v/r}}{\det(\sigma)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\sigma^{-1} | w) \right\}.$$

記法 $w \sim \mathcal{JW}_{\mathcal{C}}(N, \sigma)$ とかく .

注意 1 4 以下では, $n > v/r$ を仮定 .

例 8 (1) Real Wishart ($g = 1, v = r(r + 1)/2$).

(2) Complex Wishart ($g = 2, v = r^2$). □

注意 1 5 $\mathbb{E}[w] = 2N \sigma$.

注意 1 6 対称錐上の Wishart 分布に対して, Bartlett 分解や固有根の分布!

補題 2 : \mathcal{C} 上の Bartlett 分解 [26]

$w \sim \mathcal{JW}_{\mathcal{C}}(N, e)$ と $w = T(u)e$ とする .

$u = \sum_{j=1}^r u_j c_j + \sum_{k>j} u_{jk} (u_i > 0)$ としたとき ,

互いに独立に

$$u_j^2 \sim \chi_{2N-g(j-1)}^2, \quad u_{jk} \sim \mathcal{N}_g(0, 2I_g)$$

($j = 1, 2, \dots, r$ and $k = j + 1, \dots, r$).

推定問題の設定

★ $N > \frac{v}{r}$, $r \geq 2$, $\sigma \in \mathcal{C}$ とする .

★ 観測 $w \sim \mathcal{JW}_c(N, \sigma)$ に基づいて , 未知の σ を推定 .

損失関数 [26]

σ の推定量 $\hat{\sigma}$ に対して

$$\mathcal{L}(\hat{\sigma}, \sigma) = (\sigma^{-1} | \hat{\sigma}) - \log \det(\hat{\sigma}) + \log \det(\sigma) - r.$$

注意 17 (1) Kullback-Leibler 損失である: Given w ,

$$\int_{\mathcal{C}} f_c(\tilde{w} | N, \hat{\sigma}) \log \left(\frac{f_c(\tilde{w} | N, \hat{\sigma})}{f_c(\tilde{w} | N, \sigma)} \right) d\tilde{w}.$$

(2) $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ は第一変数に関して狭義凸 , 非負かつ $\hat{\sigma} = \sigma$ で最小 . □

リスク関数

$$\mathcal{R}(\hat{\sigma}, \sigma) = \mathbb{E}[\mathcal{L}(\hat{\sigma}, \sigma)].$$

期待値は $w \sim \mathcal{JW}_c(N, \sigma)$ に関して .

注意 18 σ の MLE $\hat{\sigma}_{mle} = w/(2N)$ リスク :

$$\mathcal{R}((2N)^{-1}w, \sigma) = r \log(2N) - \sum_{j=1}^r \mathbb{E}[\log u_j^2].$$

ただし , $u_j^2 \sim \chi_{2N-g(j-1)}^2$ ($j = 1, 2, \dots, r$). □

ミニマックスリスク

—— 三角群不変な推定量のグラス ——

$$\hat{\sigma}_\delta(w) = T(u) \left(\sum_{i=1}^r \delta_i c_i + \sum_{i < j} x_{ij} \right).$$

ただし, $w = T(u)e$, $\delta_j > 0$, $x_{ij} \in \mathcal{V}_{ij}$.

注意 19 $T \in \mathcal{T}$ に対して, $\hat{\sigma}_\delta(Tw) = T\hat{\sigma}_\delta(w)$. \square

補題 3 [26]

★ $\mathcal{R}(\hat{\sigma}_\delta, \sigma)$

$$\geq \sum_{j=1}^r \left\{ \log(2N + g(r - 2j + 1)) - \mathbb{E}[\log u_j^2] \right\}.$$

$$u_j^2 \sim \chi_{2N-g(j-1)}^2.$$

★ 等号成立は

$$\delta_i = (2N + g(r - 2j + 1))^{-1}, x_{ij} = 0,$$

のときのみ ($i = 1, 2, \dots, r$ and $j = i + 1, \dots, r$).

直交不変な推定量のクラスとその不偏リスク推定量

★ $\mathcal{K} = \mathcal{G} \cap \mathcal{O}(\mathcal{V})$. ただし, \mathcal{G} は \mathcal{C} の自己同型群の単位元連結成分, $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ は \mathcal{V} の直交群.

— 直交不変推定量の族 —

$$\hat{\sigma}_\varphi = K \sum_{j=1}^r \varphi_j(a) c_j$$

★ $w = Ka, K \in \mathcal{K}, a = \sum_{j=1}^r \lambda_j c_j \in \mathbb{R}_{\geq}^r$

★ $\mathbb{R}_{\geq}^r = \{a = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r\}$.

★ $\varphi_j(a)$ ($j = 1, 2, \dots, r$) は偏微分可能な実数値関数である.

注意 2 0 (1) 一般には, $\hat{\sigma}_\varphi$ のリスクは一定 (σ について) ではない!

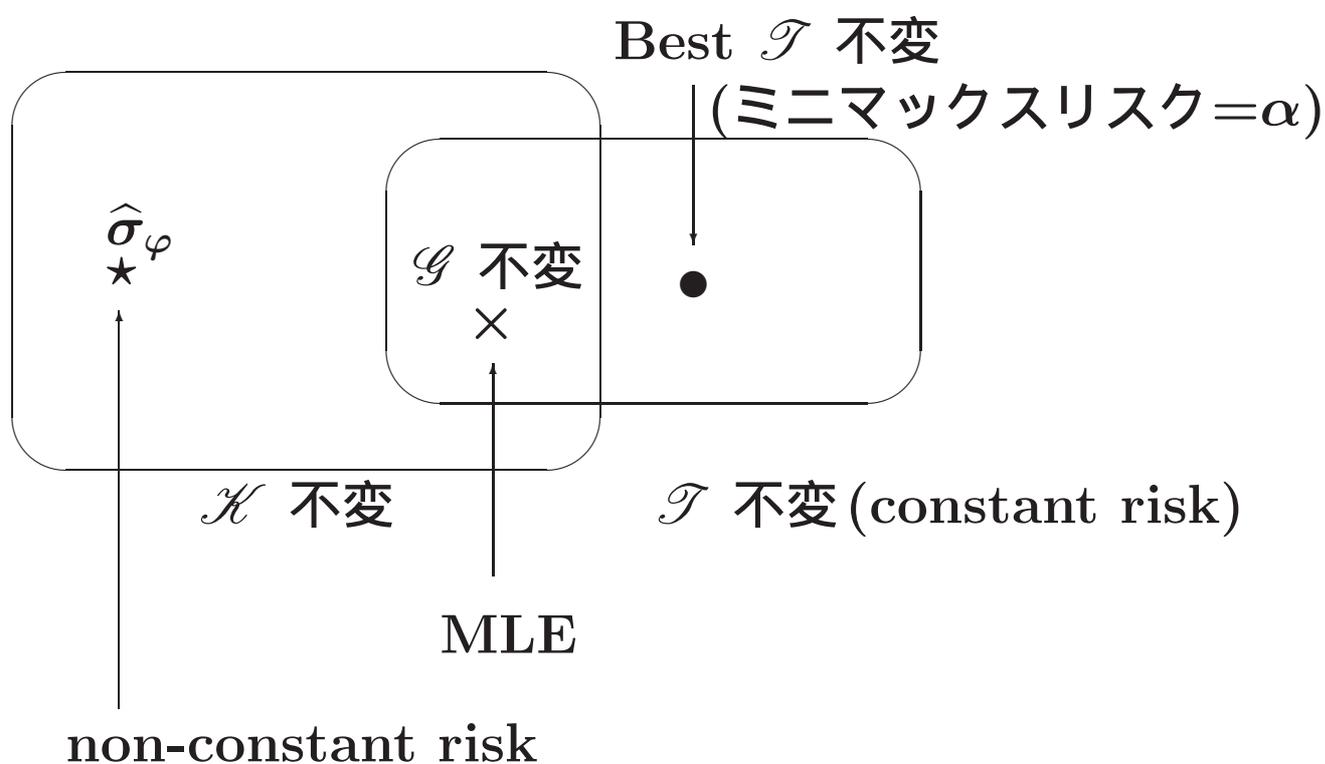
↓

$\hat{\sigma}_\varphi$ のリスクの不偏推定量を求めて, それを用いてミニマックスリスクと比較!

(2) $\hat{\mathcal{R}}_{\hat{\sigma}_\varphi}$ は $\mathcal{R}(\hat{\sigma}_\varphi, \sigma)$ の不偏推定量, i.e., $\mathbb{E}[\hat{\mathcal{R}}_{\hat{\sigma}_\varphi}] = \mathcal{R}(\hat{\sigma}_\varphi, \sigma)$ とする. このとき,

$$\hat{\mathcal{R}}_{\hat{\sigma}_\varphi} \leq \alpha \text{ (ミニマックスリスク)} \implies \mathcal{R}(\hat{\sigma}_\varphi, \sigma) \leq \alpha.$$

注意 2 1 推定量の族の関係 .



$\hat{\mathcal{R}}_{\hat{\sigma}_\varphi}$ は $\mathcal{R}(\hat{\sigma}_\varphi, \sigma)$ の不偏推定量 , i.e., $\mathbb{E}[\hat{\mathcal{R}}_{\hat{\sigma}_\varphi}] = \mathcal{R}(\hat{\sigma}_\varphi, \sigma)$ とする . このとき ,

$$\hat{\mathcal{R}}_{\hat{\sigma}_\varphi} \leq \alpha \text{ (ミニマックスリスク)} \implies \mathcal{R}(\hat{\sigma}_\varphi, \sigma) \leq \alpha.$$

□

補題 4 [26]

$$\mathbb{E}[(\sigma^{-1} | \hat{\sigma}_\varphi)] = \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^r \left\{ 2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial \lambda_j} + \left(2N - \frac{2v}{r} \right) \frac{\varphi_j}{\lambda_j} + 2g \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\varphi_i - \varphi_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right\} \right].$$

注意 2 2 (1) 証明は [42] をまねる.

(2) Real Wishart identity の証明の方針は 3 つある .

- Stein の方法 : 正規分布の部分積分 [53, 27].
- Haff の方法 : Wishart 分布の部分積分 [22].
- Sheena の方法 : Wishart 分布の固有根の分布の部分積分 [42]. □

補題 5 [26]

$\mathbb{E}[(\sigma^{-1} | \hat{\sigma}_\varphi) - \log \det(\hat{\sigma}_\varphi)]$ の不偏推定量は

$$\sum_{j=1}^r \left\{ 2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial \lambda_j} + \left(2N - \frac{2v}{r} \right) \frac{\varphi_j}{\lambda_j} + 2g \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\varphi_i - \varphi_j}{\lambda_i - \lambda_j} - \log \varphi_j \right\} \mathbb{1}_{\{\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r > 0\}}.$$

定理 1 : Dey-Srinivasan の推定量 [26]

$\varphi_j(a) = \tilde{\delta}_j \lambda_j$, $\tilde{\delta}_j = \{2N + g(r - 2j + 1)\}^{-1}$ とする . このとき ,

$$\mathcal{R}(\hat{\sigma}_\varphi, \sigma) \leq - \sum_{j=1}^r \left\{ \log \tilde{\delta}_j + \mathbb{E}[\log u_j^2] \right\}.$$

ただし , $u_j^2 \sim \chi_{2N-g(j-1)}^2$.

crude Stein 推定量 [26]

$$\hat{\sigma}_{st} = K \sum_{j=1}^r \frac{\lambda_j}{2N - 2v/r + 2g \sum_{\ell \neq j} \lambda_j / (\lambda_j - \lambda_\ell)} \times \mathbb{1}_{\{\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r > 0\}} c_j.$$

注意 2 3 (1) 導出は [42] をまねる .

(2) Dey-Srinivasan 型 $\hat{\sigma}_\varphi$ は自然な制約 $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \dots \geq \varphi_r$ を必ずしもみたしていない .

↓

order-preserving 修正が必要 . [39, 43] を参照 .

(3) $\hat{\sigma}_{st}$ はミニマックスではないと思う .

□

まとめにかえて : Directions in “Beyond Muirhead”

- [26] への批判 1 : “a piece of scholarship”



Defense :

(1) General treatment gives understanding on models other than real Wishart models.

(2) EJA approach via [15] leads to easy and better understanding and approach of multivariate calculation([38, 14, 10]).

- A lot of inference problems to be generalized to symmetric cone set-up via EJA.

- [26] への批判 2 : “Symmetric cones are rather restrictive” and “the results are not surprising”.



I (we) should try to go further away to

SURVIVE!

- Directions to go?

- Gear up to homogeneous cones!



We need more algebras for general approach!

→ Vinberg algebra [6] or j -algebras [40, 23]?

- Highly structured multivariate models

- * Models via conditionally independence, e.g., graphical models [28, 49], LCI models [5, 3, 36].

- Higher-dimensional approach ($p \gg n$) to multivariate statistical analysis!



★Need some help from

RMT or free Probability?

★Regularization technique?

参考文献

- [1] H.H. Andersen, M. Højbjerg, D. Sørensen, P.S. Eriksen, *Linear and Graphical Models*, Springer-Verlag, New York (1995).
- [2] S.A. Andersson, Invariant normal models, *Ann. Statist.* 3 (1975) 132-154.
- [3] S.A. Andersson, J. Madsen, Symmetry and lattice conditional independence in a multivariate normal distribution, *Ann. Statist.* 26 (1998) 525-572.
- [4] S.A. Andersson, M.D. Perlman, Two testing problems relating the real and complex multivariate normal distributions, *J. Multivariate Anal.* 15 (1984) 21-51.
- [5] S.A. Andersson, M.D. Perlman, Lattice models for conditional independence in a multivariate normal distribution, *Ann. Statist.* 21 (1993) 1318-1358.
- [6] S.A. Andersson, G.G. Wojnar, The Wishart distributions on homogeneous cones, *J. Theoret. Prob.* 16 (2004) 781-818.
- [7] Z.D. Bai, Methodologies in spectral analysis of large dimensional random matrices, a reivew. *Statistica Sinica* 9 (1999) 611-677.
- [8] J. Bonder, P. Milnes, Amenability: A survey for statistical applications of Hunt-Stein and related conditions on groups, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 57 (1981) 103-128.
- [9] M. Casalis, G. Letac, The Lukas-Olkin-Rubin characterization of Wishart distributions on symmetric cones, *Ann. Statist.* 24 (1996) 763-786.
- [10] Y. Chikuse, *Statistics on special Manifolds* (2003).
- [11] G. Consonni, P. Veronese, Enriched conjugate and reference priors for the Wishart family on symmetric cones, *Ann. Statist.* 31 (2003) 1491-1516.

- [12] D.K. Dey, C. Srinivasan, Estimation of a covariance matrix under Stein's loss, *Ann. Statist.* 13 (1985) 1581-1591.
- [13] M.L. Eaton, Group Invariance Application in Statistics, Regional conference series in Probability and Statistics Vol. 1, Institute of Mathematical Statistics (1989).
- [14] R.H. Farrell, Multivariate calculation, Springer-Verlag (1985).
- [15] J. Faraut, K. Korányi, Analysis on Symmetric Cones, Oxford Science Publications (1994).
- [16] L. Faybusovich, Euclidean Jordan algebras and interior-point algorithms, *Positivity* 1 (1997) 331-357.
- [17] L. Faybusovich, T. Tsuchiya, Primal-dual algorithms and infinite-dimensional Jordan algebras of finite rank, *Math. Program Ser. B* 97 (2003) 471-493.
- [18] M. Fonseca, J.T. Mexia, R. Zmyslony, Binary operations on Jordan algebras and orthogonal normal models, *Linear Algebra Appl.* 417 (2006) 75-86.
- [19] N.R. Goodman, Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution (An introduction), *Ann. Math. Statist.* 34 (1963) 152-176.
- [20] K.I. Gross, D.St.P. Richards, Special functions of matrix argument. I: algebraic induction, zonal polynomials, and hypergeometric functions, *Tran. Amer. Math. Soc.* 301 (1987) 781-811.
- [21] P. Graczyk, G. Letac, H. Massam, The complex Wishart distribution and symmetric group, *Ann. Statist.* 31 (2003) 287-309.
- [22] L.R. Haff, The variational form of certain Bayes estimators, *Ann. Statist.* 19 (1992) 1163-1190.

- [23] H. Ishi, Positive Reisz distributions on homogeneous cones, *J. Math. Soc. Japan*, 52 (2000) 161-186.
- [24] W. James, C. Stein, Estimation with quadratic loss, in *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. 1* 361-380, Univ. California Press (1961).
- [25] C.G. Khatri, Classical statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution, *Ann. Math. Statist.* 36 (1965) 98-114.
- [26] Y. Konno, Estimation of a normal covariance matrix parametrized by irreducible symmetric cones under Stein's loss., to appear in *J. Multivariate Anal.*, available at Science Direct(2006).
- [27] T. Kubokawa, M.S. Srivastava, Robust improvement in estimation of a covariance matrix in an elliptically contoured distribution, *Ann. Statist.* 27 (1999) 600–609.
- [28] S.L. Lauritzen, *Graphical models*, Oxford Univ. Press (1996).
- [29] G. Letac, H. Massam, Representation of the Wishart distributions, in *Contemporary Mathematics* 261 (2000) 121-142.
- [30] G. Letac, H. Massam, A tutorial on non central Wishart distributions. Available at <http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Letac/Wishartnoncentrales.pdf>.
- [31] S.P. Lin, M.D. Perlman, A Monte Carlo comparison of four estimators for a covariance matrix, in *Multivariate Analysis VI* (P.R. Krishnaiah, ed.) 411-426, North-Holland, Amsterdam (1985).
- [32] D. Maiward, D. Kraus, Calculation of moments of complex Wishart and complex inverse Wishart distributed matrices, *Radar, Sonar and Navigation*, *IEEE Proceedings* 147 (2000) 162 - 168.
- [33] J.D. Malley, *Statistical Applications of Jordan Algebras*, Lecture notes in Statistics 91, Springer-Verlag (1994).

- [34] H. Massam, An Exact decomposition theorem and a unified view of some related distributions for a class of exponential transformation models on symmetric cones, *Ann. Statist.* 32 (1994) 389-394.
- [35] H. Massam, E. Neher, On transformations and determinants of Wishart variables on symmetric cones, *J. Theoret. Probat.* 10 (1997) 867-902.
- [36] H. Massam, E. Neher, Estimation and testing for lattice conditional independence models of Euclidean Jordan algebras, *Ann. Statist.* 26 (1998) 1051-1082.
- [37] M.L. Mehta, *Matrix Theory*, Les Editions de Physique, 91944 Les Ulis Cedex, France (1989).
- [38] R.J. Muirhead, *Aspects of Multivariate Statistical Analysis*, John Wiley & Sons, Inc (1982).
- [39] F. Perron, Minimax estimators of a covariance matrix, *J. Multivariate Anal.* 43 (1992) 6-28.
- [40] I.I. Pyatetskii-Shapiro, *Automorphic Functions and the Geometry of Classical Domains*, Mathematics and its Applications vol.8, Gordon and Breach (1969).
- [41] P. Shaman, The inverted complex Wishart distribution and its application to spectral estimation, *J. Multivariate Anal.* 10 (1980) 51-59.
- [42] Y. Sheena, Unbiased estimator of risk for an orthogonally invariant estimator of a covariance matrix, *J. Japan Statist. Soc.* 25 (1995) 35-48.
- [43] Y. Sheena, A. Takemura, Inadmissibility of non-order-preserving orthogonally invariant estimators of the covariance matrix in the case of Stein's loss, *J. Multivariate Anal.* 41 (1992) 117-131.
- [44] C. Stein, Lectures on the theory of estimation of many parameters, in *Studies in the Statistical Theory of Estimation I*(I. A. Ibragimov and M. S. Nikulin, eds.) (1977).

- [45] L. Svensson, M. Lundberg, Estimating complex covariance matrix, Signals, Systems and Computers, Conference Record of the Thirty-Eighth Asilomar Conference on Volume 2 (2004) 7-10 2151 - 2154.
- [46] A. Takemura, An orthogonally invariant minimax estimators of the covariance matrix of a multivariate normal populations, Tsukuba J. Math. 8 (1984) 365-376.
- [47] A. Takemura, Y. Sheena, Distribution of eigenvalues and eigenvectors of Wishart matrix when the population eigenvalues are infinitely dispersed and its application to minimax estimation of covariance matrix, Journal of Multivariate Analysis, 94 (2005) 271-299.
- [48] S. Tolver Jensen, Covariance hypotheses which are linear in both the covariance and the inverse covariance, Ann. Statist. 16 (1988) 302-322.
- [49] M.J. Wainwright, M.I. Jordan, Graphical models, exponential families, and variational inference, Technical Report 649, Department of Statistics, University of California, Berkeley, 2003, available at <http://www.cs.berkeley.edu/~jordan/publications.html>.
- [50] J. Wishart, The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population, Biometrika 20A (1928), 32-52.
- [51] 伊吹山知義, Koecher-Maass series on tube domain, 1(999) available at <http://www.math.wani.osaka-u.ac.jp/group/numberth/workshop/autumn98/proc/proc.html>.
- [52] 志摩裕彦, ヘッセ幾何学, 裳華房 (2001).
- [53] 竹村彰通, 多変量推測統計の基礎, 共立出版 (1991).
- [54] 野村隆昭, Jordan 代数と解析学 (1993), available at <http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~tnomura/ARTICJP/indexajp.html>.