統計数学セミナー: 2007 年 12 月 5 日

於：東大数理科学研究科棟 122 号室

A Decision-Theoretic Approach to Estimation from Wishart Matrices on Symmetric Cones

日本女子大学理学部
今野 良彦 (email: konno[at]fc.jwu.ac.jp)

December 6, 2007

この講演の背景・目的

背景１　Real Wishart モデル [54] (1928 生まれ)の一般化：

(a) 対称錐（自己双対 + 等質）上の Wishart 分布([9, 39]) via Euclidean Jordan 代数 [15]：(1) Real Wishart, (2) Complex Wishart [1], (3) Quaternion Wishart[2], (4) Lorentz Wishart[52].

(b) 等質錐上の Wishart 分布：Andersson and Wojnar[6], Ishi [23, 24], Letac and Massam [34].

(c) Lattice conditionally independent models（LCI モデルと書く） [5, 3].

背景２ Real Wishart 分布のスケール行列母数の推定問題を Stein 損失のもとで考えたとき，経験共分散行列の固有根を shrinkage-expansion technique で修正することにより，直交不変ミニマックス推定量が得られることが知られている．[12, 22, 48] を参照．リスクの評価は SURE 法を使う.

Question [背景２] の結果をどこまで拡張できるか？

結果 Euclidean Jordan 代数を用いて (a) へ [背景２] の結果を拡張 [27].

この講演の構成

- 実対称行列の空間と Real Wishart 分布の固有根の分布について（[背景２]の問題意識）.

- 対称錐と等質錐について.

- Euclidean Jordan 代数（以下 EJA と書く）について.

- 対称錐上の Wishart models とその性質について.

- Decision-theoretic approach to estimation problems on the generalized Wishart models.

- まとめにかえて：Beyond Muirhead[42].

Real Wishart 分布

$\mathbb{R}^r$-値確率ベクトル $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立同一に多変量正規分布 $N_r(0, \Sigma)$ に従う：

$$P(dx) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}\mathrm{Det}(\Sigma)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x'\Sigma^{-1}x\right\} (dx)$$

ただし，

$$\Sigma \in \mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R}) = \{S \in \mathbb{R}^{r\times r} : x'Sx > 0 \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^r, x \neq 0\},$$

dx は $\mathbb{R}^r$ 上のルベーグ測度，x' は縦ベクトル x の転置.

$\boxed{\text{Wishart Matrix}}$ $W : r \times r = \sum_{j=1}^{n} X_i X_i'$ とおく．W のことをウイシャート行列と呼ぶことにする．

定義より，$W \in \overline{\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})}$（$\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})$ の閉方）であるが，

$$\mathbb{P}\{W \in \mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})\} = 1 \Longleftrightarrow n \geq r \quad \text{かつ} \quad \Sigma \in \mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})$$

となる．Eaton (1983, page 304) を参照.

実または複素数値正規分布	$\overset{2\text{ 乗和}}{\Longrightarrow}$	ガンマ分布（χ^2 分布）
$\Downarrow$		$\Downarrow$
多変量実正規分布	$\overset{2\text{ 乗和}}{\Longrightarrow}$	Real Wishart 分布
多変量複素正規分布	$\overset{2\text{ 乗和}}{\Longrightarrow}$	Complex Wishart 分布

Real Wishart density ($\Sigma \in \mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})$，$n \geq r$ を仮定．)

$$W_r(\Sigma, n)(dx) = \frac{1}{c_{r,n}(\mathrm{Det}\Sigma)^{n/2}}(\mathrm{Det}x)^{n/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\Sigma^{-1}x\right)\right) \times \mathbb{1}_{\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})}(x)\frac{(dx)}{(\mathrm{Det}\,x)^{(r+1)/2}}$$

この分布を $W_r(\Sigma, n)$ とかく．ただし，

$$c_{r,n} = 2^{nr}\pi^{r(r-1)/4}\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma((n-i)/2),$$

$$\mathbb{1}_{\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

Wishart 行列の分解：ガウス分解と極分解

ガウス分解

$$S = TT', \qquad T \in \mathrm{GT}_r^+(\mathbb{R})$$

ただし，$G := \mathrm{GT}_r^+(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ ($r \times r$ の正則行列の全体の空間)を対角成分が正の下三角行列の集合とする．$x \in \mathrm{GT}_r^+(\mathbb{R})$ のとき，

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} \end{pmatrix}$$

で $x_{ii} > 0,\ x_{ij} \in \mathbb{R}\,(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ i)$.

極分解

$$S = HLH', \quad H \in \mathrm{O}_r(\mathbb{R}), \quad L = \mathrm{diag}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_r)$$

$$\text{with } \ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_r > 0$$

ただし，

$$\mathrm{O}_r(\mathbb{R}) = \{H \in \mathbb{R}^{r \times r} : H'H = HH' = I_r\}$$

で I_r は $r \times r$ の単位行列とする．

Wishart 行列の分解の分布論

命題２：Bartllet 分解

$W \sim W_r(I_r, n)\,(n \geq r)$ とし，$W = TT'$ と分解．ただし，$T = (t_{ij}) \in \mathrm{GT}_r^+(\mathbb{R})$．このとき，$t_{ij}$ は互いに独立であって，

$$t_{ii}^2 \sim \chi^2_{(n-i+1)},\, t_{ij} \sim N(0,\, 1)\,(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, r,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, i).$$

命題３：(White) Real Wishart 行列の固有根の分布

$W \in \mathrm{Sym}^+ r(\mathbb{R}) \sim W_r(I_r, n)$ で $n \geq r$．このとき，W の固有値 $\ell = (\ell_1,\, \ldots,\, \ell_r)\,(\ell_1 \geq \cdots \geq \ell_r)$ の joint density は

$$\mu(d\ell) \propto \prod_{i=1}^{r} \ell_i^{n-r-1} e^{-\ell_i/2} \prod_{i<j} (\ell_i - \ell_j) \prod_{i=1}^{r} d\ell_i,$$

等質錐と対称錐

$\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ の $\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})$ への作用（変換）: $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R}) \times \mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R}) \qquad (g, x) \mapsto gxg'$.

このとき，作用は推移的である：

$\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})$ は等質空間

任意の $x,\, y \in \mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})$ に対して，ある $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ が存在して，$x = gyg'$ とできる.

$\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})$ は凸錘

$$x_1,\, x_2 \in \mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R}),\, \lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{R}\,(\lambda_1,\, \lambda_2 > 0) \Longrightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})$$

proper 凸錐

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})} \cap (-\overline{\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})}) &= \{0\}, \\ \overline{\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})} \cup \overline{(-\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R}))} &= \mathrm{Sym}_r(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

任意の元 $x, y \in \mathrm{Sym}_r(\mathbb{R})$ に対して，x, y の内積 $(x|\,y)$ を $(x|\,y) = \mathrm{Tr}(xy)$ で定める．$\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})$ は $r(r+1)/2$ 次元 Euclid 空間の開集合である．

自己双対

開凸錐 $\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})$ の開双対錐 $\{\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})\}^*$ を

$$\{\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})\}^* = \{x \in \mathrm{Sym}_r(\mathbb{R}) :\ (x|\,y) > 0 \quad \text{for } y \in \overline{\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})} \setminus \{0\}\}$$

で定めたとき，

$$\{\mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})\}^* = \mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})$$

対称錐（symmetric cones）

$$\text{等質錐} + \text{自己双対凸錐} = \text{対称錐},$$

$$\text{等質錐} \supset \text{対称錐} \supset \mathrm{Sym}_r^+(\mathbb{R})$$

Real Wishart 行列の固有根の周辺分布

$r \times r$ の正値対称行列 $W \sim W_r(\Sigma, n)$ ($\Sigma > 0$ かつ $n \geq r$) の固有根を $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_r$ とする．W/n は Σ の不偏推定量.

しかし，W/n の固有根 $(\ell_1/n, \ldots, \ell_r/n)$ は Σ の固有根のバイアス推定量となる！

$$\Downarrow$$

Shrink eigenvalues towards a center!

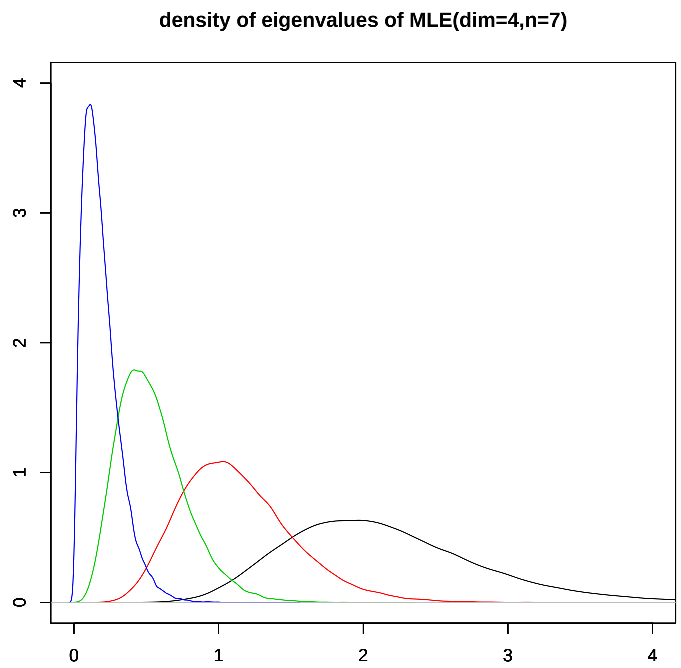


Figure 1: シミュレーションによる $W_4(I_4,\,7)$ の $(\ell_1,\,\ldots,\,\ell_4)/7$ の周辺確率密度関数$(r=4,\,n=7)$の作図.

Real Wishart 行列の固有根の分布: from RMT view

$\boxed{\text{Marčhenko and Pastur law}}$ [7] を参照. $r = r(n)$ とし, $r/n \to \tau \le 1 (n \to \infty)$ のとき,

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \mathbb{1}_{\lambda_i \le x} \to \int_{-\infty}^{x} \frac{\sqrt{(b-t)(t-a)}}{2\pi t\tau} \mathbb{1}_{a \le t \le b}\, dt$$

(almost surely).

ただし, $a = (1-\tau^{1/2})^2$, $b = (1+\tau^{1/2})^2$.

[48] の Lecture 4 を参照.

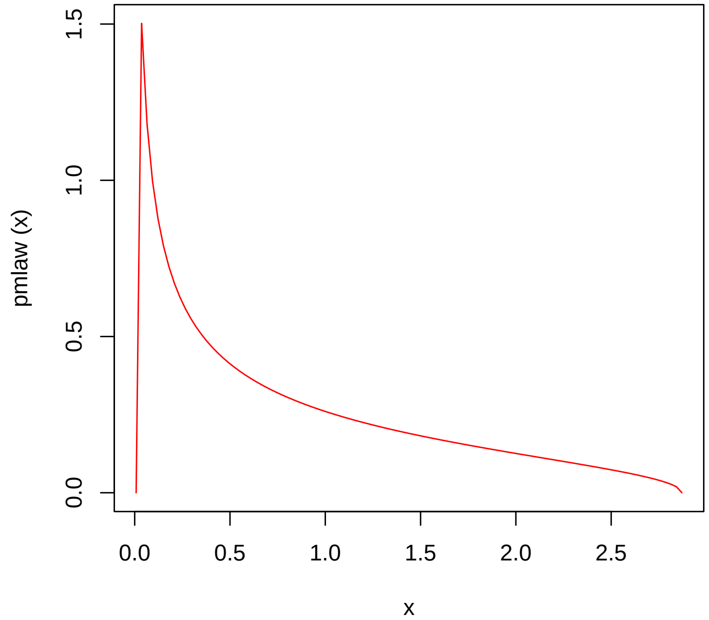


Figure 2: Density of Marčhenko-Pastur's quater-circle law ($\tau = 4/7 \doteqdot 0.57$, $a \doteqdot 0.06$, $b \doteqdot 3.086$).

Euclidean Jordan Algebras (EJA)

$\star$ 任意の対称錐体は EJA の正錐として表される！

$\star$ Tolver Jensen [52] — 多変量正規分布の共分散行列と共分散行列の逆行列について線型な仮説は real, complex, quaternion structures or Lorentz cone により表現されるモデルの積となる.

$\star$ Massam and Neher [40] — Lattice conditionally independence models [5]（LCI モデルと書くことにする）の EJA を用いた拡張.

$\boxed{\text{注意１}}$ LCI モデルの定める錐体（AP cone）は推移的に作用するある線型群をもつ.

$\star$ J. Faraut, K. Korányi [15] — user-friendly textbook on symmetric cones（伊師氏の書評・「数学」第 58 巻 (2006) 第 2 号を参照）.

$\boxed{\text{Euclidean Jordan 代数とは}}$ [15]を参照.

$\star\ \mathcal{V}$:　有限次元実ベクトル空間 とし，内積を $(\cdot|\cdot)$.

ジョルダン積

$(x,\, y) \mapsto x \circ y\, (\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V})$ は以下をみたす.
$\star\ x \circ y = y \circ x$　（可換律）（注：単位元を e と書く）
$\star\ x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y)$　（結合律は成立しない！）.
$\star\ (x|\, z \circ y) = (z \circ x|\, y)$.

ただし，$x^2 = x \circ x$ と書いた.

$\boxed{\text{注意 2}}$　$\mathcal{V}$ は power-associative, i.e., $x^p \circ x^q = x^{p+q}$（$\forall a \in \mathcal{V}$, p, q は非負の整数）. $\square$

$\boxed{\text{例 1}}$ $\mathcal{V} = \mathrm{Sym}_r(\mathbb{R})$ とする．このとき

$$X \circ Y = \frac{XY + YX}{2}, \qquad {}^\forall X, Y \in \mathrm{Sym}_r(\mathbb{R}).$$

$\square$

$\boxed{\text{例 2}}$ $\mathcal{V} = \mathbb{R} \times \mathcal{W}$ とする．ただし，$\mathcal{W}$ は有限次元実ベクトル空間（$\dim \mathcal{W} \geq 2$）とし，B を $\mathcal{W}$ 上の内積とする．このとき，$(\alpha, \mathbb{a}), (\beta, \mathbb{b})$ in $\mathbb{R} \times \mathcal{W}$ に対して，

$$(\alpha, \mathbb{a}) \circ (\beta, \mathbb{b}) = (\alpha\beta + B(\mathbb{a}|\,\mathbb{b}), \alpha\mathbb{b} + \beta\mathbb{a}).$$

$\square$

EJA の用語と性質（４）— [15]を参照．

$\star$ $x \in \mathcal{V}$ に対して，ある正の整数 $m(x)$ が存在して，

$$m(x) = \min\{k > 0 :\ e, x, x^2, \ldots, x^k \text{は線型独立}\}.$$

.

$\mathcal{V}$ のランク

$$r = \max\{m(x) :\ x \in \mathcal{V}\}.$$

注意３ (1) 集合 $\{x \in \mathcal{V} :\ m(x) = r\}$ は 開かつ稠密.

(2) $m(x) = r$ なる x に対して，minimal polynomial

$$f(\lambda; x) \quad = \quad \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + a_2(x)\lambda^{r-2} + \cdots + (-1)^r a_r(x)$$

が存在し，j 次の斉次多項式関数 a_j は unique. $\square$

$x \in \mathcal{V}$ の trace と determinant

$$\mathrm{tr}(x) = a_1(x), \qquad \det(x) = a_r(x).$$

例 3 (例 2 の続き) $\mathcal{V} = \mathbb{R} \times \mathcal{W}$ とする．ただし，$\mathcal{W}$ は有限次元実ベクトル空間とし，B を $\mathcal{W}$ 上の内積とする．このとき，$x = (\chi, \mathbb{x}) \in \mathcal{V}$ に対して，$x^2 - 2\chi x + (\chi^2 - B(\mathbb{x}|\,\mathbb{x}))e = 0$（$e = (1, \mathbb{0})$）から $\mathrm{rank}(\mathcal{V}) = 2$, $\mathrm{tr}(x) = 2\chi$, $\det(x) = \chi^2 - B(\mathbb{x}|\,\mathbb{x})$. □

EJA の意味での $\mathcal{V}$ の内積

$$(x|\,y) = \mathrm{tr}(x \circ y).$$

$x \in \mathcal{V}$ の逆元

x が可逆であるとは，ある元 $y \in \mathbb{R}[x]$ が存在して，$x \circ y = e$ となるときをいう．これを x^{-1} と書く．ただし，$\mathbb{R}[x]$ は e, x で生成される $\mathcal{V}$ の subalgebra.

注意 4 一般に，$a, b \in \mathcal{V}$ に対して，$\det(a \circ b) \neq \det(a)\det(b)$. しかし，$a, b \in \mathbb{R}[x]$ に対して，$\det(a \circ b) = \det(a)\det(b)$, $\mathrm{tr}(e) = \mathrm{rank}(\mathcal{V})$, $\det(e) = 1$.

$\star$ $\mathcal{V}^\times = \{x \in \mathcal{V} :\ x$ は可逆$\}$ とおく.

$\mathcal{V}^\times$ の特徴付け

$$x \in \mathcal{V}^\times \Longleftrightarrow \det(x) \neq 0.$$

対称錐体

$$\mathcal{C} := \{x^2 : x \in \mathcal{V}^\times\}.$$

$\star$ $\mathcal{V}$ を単純(自明でないイデアルを持たない)とする.

<u>以後の議論では $\mathcal{V}$ を単純と仮定</u>.

Jordan frame $c_1, c_2, \ldots, c_r$ は 0 でないベキ等元の完全直交系．すなわち，$c_i^2 = c_i$, $c_i \circ c_j = 0\,(i \neq j)$, $c_1 + c_2 + \cdots + c_r = e$.

$\boxed{\text{Jordan frame}}$ $c_1, c_2, \ldots, c_r$ は 0 でないベキ等元の完全直交系．すなわち，$c_i^2 = c_i$, $c_i \circ c_j = 0\,(i \neq j)$, $c_1 + c_2 + \cdots + c_r = e$.

$\boxed{x \in \mathcal{V}\text{ のスペクトル分解}}$ Jordan frame $c_1, c_2, \ldots, c_k\,(k \leq r)$ と 0 でない実数 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$ が存在して，

$$x = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_k c_k$$

と一意的に表現できる.

$\boxed{\text{Peirce 分解}}$ $\mathrm{rank}\mathcal{V} = r$ とし，Jordan frame $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ を固定する. $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して，

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ii} &:= \{x \in \mathcal{V} : x \circ c_i = x\} = \mathbb{R}c_i, \\ \mathcal{V}_{ij} &:= \{x \in \mathcal{V} : x \circ c_i = (1/2)x = x \circ c_j\} \quad (i < j). \end{aligned}$$

このとき，$\mathcal{V} = \oplus_{i \leq j} \mathcal{V}_{ij}$, $\quad \dim\mathcal{V}_{ij} = g\,(i < j)$.

$\boxed{\text{注意 5}}$ (1) g を the Peirce invariant という.

(2) $\mathcal{V}$ を単純(自明でないイデアルを持たない), $\dim\mathcal{V} = v$, $\mathrm{rank}\mathcal{V} = r$ としたとき, 次を含む 5 つ場合と同型.

$v = r + \frac{g}{2}r(r-1)$			
$\mathcal{V}$	$\dim\mathcal{V}$	$\mathrm{rank}\mathcal{V}$	g
$\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$	$\frac{1}{2}r(r+1)$	r	1
$\mathrm{Herm}(r, \mathbb{C})$	r^2	r	2
$\mathrm{Herm}(r, \mathbb{H})$	$r(2r-1)$	r	4
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{v-1}$	v	2	$v-2$

変換群

$\boxed{\text{変換群}}$ [15, 27] を参照.

$\boxed{\text{実対称行列の場合}}$ (1) 三角群の作用で不変な推定量のクラス．実対称行列 S は，実上三角行列 U を用いて，$W = UU'$ とかけた.

(2) 直交群の作用で不変な推定量のクラス．SVD を行う.

$$\Downarrow$$

一般化！

三角群：用語

(1) $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ を $\mathcal{V}$ の一般線型群.
(2) $\mathscr{G}$ を $\mathcal{C}$ の自己同型群 $\{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{V}) : g(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}$ の単位元の連結成分とする.
(3) $\mathscr{K} = \mathscr{G} \cap \mathscr{O}(\mathcal{V})$. ただし，$\mathscr{O}(\mathcal{V})$ は $\mathcal{V}$ の直交群.
(4) $\mathcal{V}$ の Jordan frame $c_1, c_2, \ldots, c_r$, $(\mathrm{rank}\mathcal{V} = r)$ を固定し，$x \in \mathcal{V}$ に対し，

$$x = \sum_{i=1}^{r} x_i c_i + \sum_{i<j} x_{ij}, \quad x_{ij} \in \mathcal{V}_{ij} = \{x \in \mathcal{V} : x \circ c_i = x \circ c_j = (1/2)x\}.$$

(5) $\mathcal{V}$ の 2 次表現：$P(x) := 2L(x)^2 - L(x^2)$．ただし，$L(x)y := xy$.
(6) Frobenius 変換：$z \in \{x \in \mathcal{V} : c \circ z = (1/2)z\}$ とベキ等元 c(原始的でなくともよい)に対して,

$$\tau_c(z) := \exp\{L(z) + 2L(z)L(c) - 2L(c)L(z)\}.$$

ただし，写像 A に対して，$\exp(A) = \sum_{j=1}^{\infty} A^j/j!$.

三角群の定義

(1) $x \in \mathcal{V}$ によらない $\lambda_{ij} > 0$ について，$\mathscr{G}$ の元 T で

$$(Tx)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } (i,\, j) < (k,\, \ell), \\ \lambda_{ij} x_{ij} & \text{otherwise.}, \end{cases}$$

となるものの全体を $\mathscr{T}$ と書く．ただし，$\{(i,\, j) : 1 \le i,\, j \le r\}$ には辞書式順序をいれた． □

(2) $\mathcal{U}_+ = \{u = \sum_{i=1}^r u_i c_i + \sum_{i<j} u_{ij} \in \mathcal{V} :\ u_i > 0,\, u_{ij} \in \mathcal{V}_{ij}\}$ とおく．

三角群の元の母数化

$u \in \mathcal{U}_+$ に対して，全単射 $T : \mathcal{U}_+ \mapsto \mathscr{T}$ を

$$T(u) \quad = \quad P(b_1)\tau_{c_1}(u^{(1)})P(b_2)\tau_{c_2}(u^{(2)}) \times \cdots \times \tau_{c_{r-1}}(u^{(r-1)})P(b_r).$$

ただし，$u^{(j)} = \sum_{k=j+1}^r u_{jk}$ と $b_j = c_1 + \cdots + c_{j-1} + u_j c_j + c_{j+1} + \cdots + c_r$.

補題 1 [15, 27]

(1) $\det(x)^{-v/r}\,dx = 2^r \Pi_{j=1}^r u_j^{-g(j-1)-1}\,du$.
ただし，$dx = \Pi_{i=1} dx_i \Pi_{i<j} d(\sqrt{2}x_{ij})$.
(2) $a_j > 0$, $x_{ik} \in \mathcal{V}_{jk}$ とし，$x = T(u)\sum_{j=1}^r a_j c_j$ の Peirce 分解を $x = \sum_{j=1}^r x_j c_j + \sum_{j<k} x_{jk}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} x_j &= a_j u_j^2 + (1/2)\sum_{k=1}^{j-1} a_k \|u_{kj}\|^2, \\ x_{jk} &= a_j u_j u_{jk} + 2\sum_{\ell=1}^{j-1} a_\ell u_{\ell j} u_{\ell k}, \\ \mathrm{tr}(x) &= \sum_{j=1}^r a_j u_j^2 + (1/2)\sum_{j=1}^r \sum_{k=j+1}^r a_j \|u_{jk}\|^2. \end{aligned}$$

ただし $\|\cdot\|$ は Euclidean norm.

$\mathcal{V}$ の極分解

$x \in \mathcal{V}$ に対して，

$$x = Ka,\ K \in \mathcal{K},\ a \in \mathbb{R}_{\geq}.$$

ただし，$\mathbb{R}^r_{\geq} = \{a = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r\}$.

$\boxed{\text{注意 6}}$ $dx \propto dK\ da_1 \ldots da_r.$ □

積分公式

f を $\mathcal{V}$ 上の可積分関数とする．このとき，

$$\int_{\mathcal{V}} f(x)\, dx \quad \propto \quad \int_{\mathscr{K} \times \mathbb{R}^r_{\geq}} f(Ka)\Pi_{i<j}(a_i - a_j)^g\, dK\ da_1 \ldots da_r.$$

ただし，$dx = \Pi_{i=1} dx_i \Pi_{i<j} d(\sqrt{2}x_{ij})$，$dK$ は $\mathscr{K}$ 上の Haar 測度.

$\mathcal{C}$ 上のウィシャート分布

denstiy

$N > \frac{v}{r} - 1,\ r \geq 2,\ \sigma \in \mathcal{C}$ のとき，$w \in \overline{\mathcal{C}}$

$$f_{\mathcal{C}}(w|\,N,\,\sigma) \propto \frac{\det(w)^{N-v/r}}{\det(\sigma)^N} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma^{-1}|\,w)\right\}.$$

記法 $w \sim \mathcal{JW}_{\mathcal{C}}(\sigma,\,N)$ とかく. □

注意 7 以下では，$N > v/r$ を仮定. □

例 4 (1) Real Wishart ($g = 1,\ v = r(r+1)/2$). (2) Complex Wishsrt ($g = 2,\ v = r^2$). □

注意８ $\mathbb{E}[w] = 2N\,\sigma.$

注意９ 対称錐上の Wishart 分布に対して，Bartelett 分解や固有根の分布！

補題２：$\mathcal{C}$ 上の Bartelett 分解[27]

$w \sim \mathcal{JW}_{\mathcal{C}}(N,\, e)$ と $w = T(u)e$ とする．
$u = \sum_{j=1}^{r} u_j c_j + \sum_{k>j} u_{jk}\,(u_i > 0)$ としたとき，互いに独立に

$$u_j^2 \sim \chi^2_{2N-g(j-1)}, \qquad u_{jk} \sim \mathcal{N}_g(0,\, 2I_g)$$

$(j = 1,\, 2,\, \ldots,\, r$ and $k = j+1,\, \ldots,\, r)$.

Wishart 分布の母数 σ 推定問題の設定

$\star$ $N > \dfrac{v}{r}$, $r \geq 2$, $\sigma \in \mathcal{C}$ とする.

$\star$ 観測 $w \sim \mathcal{JW}_{\mathcal{C}}(\sigma, N)$ に基づいて，未知の σ を推定.

損失関数[27]

σ の推定量 $\widehat{\sigma}$ に対して

$$\mathscr{L}(\widehat{\sigma}, \sigma) = (\sigma^{-1} | \widehat{\sigma}) - \log\det(\widehat{\sigma}) + \log\det(\sigma) - r.$$

注意１０ (1) Kullback-Leibler 損失である：Given w,

$$\int_{\mathcal{C}} f_{\mathcal{C}}(\tilde{w}|\, N, \widehat{\sigma}) \log\left(\frac{f_{\mathcal{C}}(\tilde{w}|\, N, \widehat{\sigma})}{f_{\mathcal{C}}(\tilde{w}|\, N, \sigma)}\right) d\tilde{w}.$$

(2) $\mathscr{L}(\cdot\,, \cdot\,)$ は第一変数に関して狭義凸，非負かつ $\widehat{\sigma} = \sigma$ で最小. $\square$

リスク関数

$\mathscr{R}(\widehat{\sigma}, \sigma) = \mathbb{E}[\mathscr{L}(\widehat{\sigma}, \sigma)]$. 期待値は $w \sim \mathcal{JW}_{\mathcal{C}}(\sigma, N)$ 関して.

MLE のリスクとミニマックスリスク

$\boxed{\text{注意１１}}$ σ の MLE $\widehat{\sigma}_{mle} = w/(2N)$ リスク：$u_j^2 \sim \chi^2_{2N-g(j-1)}$ とし，

$$\mathscr{R}((2N)^{-1}w,\, \sigma) = r\log(2N) - \sum\nolimits_{j=1}^{r} \mathbb{E}[\log u_j^2]. \qquad \square$$

ミニマックスリスク：三角群不変な推定量のグラス

$$\hat{\sigma}_\delta(w) = T(u)\left(\sum_{i=1}^{r} \delta_i c_i + \sum_{i<j} x_{ij}\right).$$

ただし，$w = T(u)e,\ \delta_j > 0,\ x_{ij} \in \mathcal{V}_{ij}$.

補題３ [27]

$$\mathscr{R}(\widehat{\sigma}_\delta,\, \sigma) \geq \sum_{j=1}^{r}\left\{\log\bigl(2N + g(r-2j+1)\bigr) - \mathbb{E}[\log u_j^2]\right\}.$$

等号成立は $\delta_i = \bigl(2N + g(r-2j+1)\bigr)^{-1},\ x_{ij} = 0$, のときのみ

直交不変な推定量のクラスとその不偏リスク推定量

$\mathscr{K} = \mathscr{G} \cap \mathscr{O}(\mathcal{V})$．ただし，$\mathscr{G}$ は $\mathcal{C}$ の自己同型群の単位元連結成分，$\mathscr{O}(\mathcal{V})$ は $\mathcal{V}$ の直交群.

直交不変推定量の族

$$\widehat{\sigma}_\varphi = K \sum_{j=1}^{r} \varphi_j(\boldsymbol{a}) c_j$$

⋆ $w = Ka$, $K \in \mathscr{K}$, $a = \sum_{j=1}^r \lambda_j c_j \in \mathbb{R}^r_{\geq}$
⋆ $\mathbb{R}^r_{\geq} = \{a = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r\}$.
⋆ $\varphi_j(\boldsymbol{a})$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ は偏微分可能な実数値関数である.

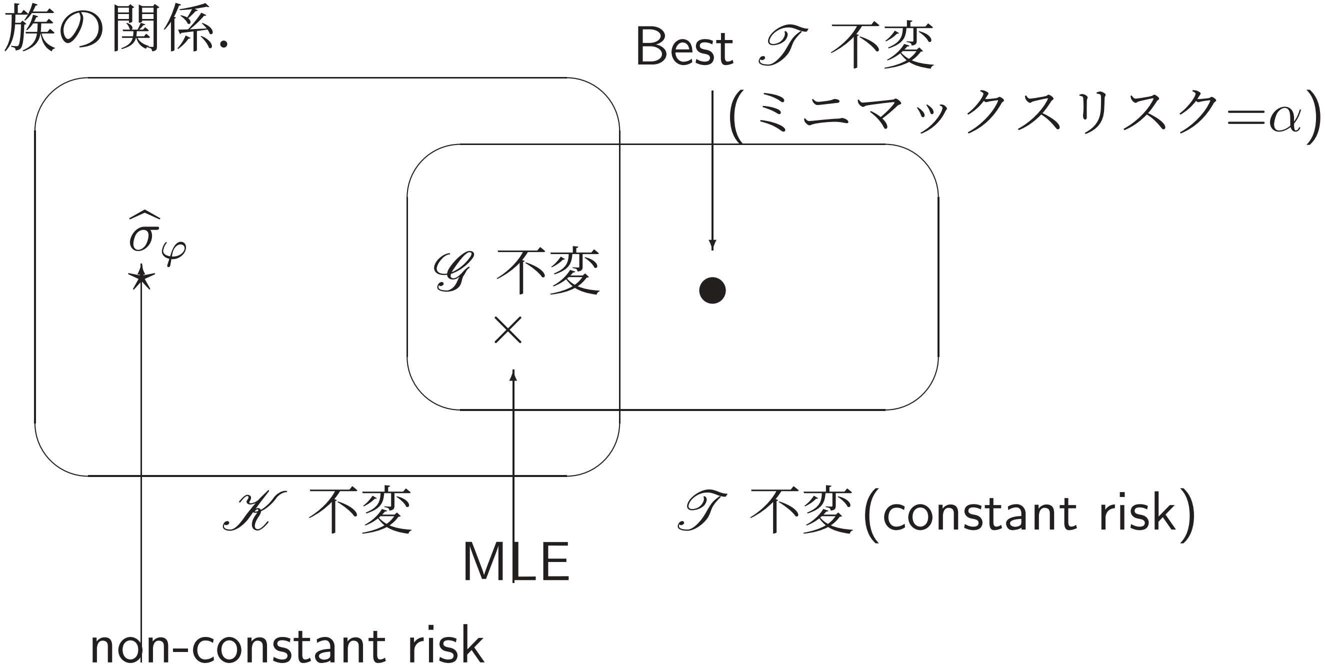
$\boxed{\text{注意１２}}$ SURE 法(Stein's unbiased risk estimator)

(1) 一般には，$\widehat{\sigma}_\varphi$ のリスクは一定（σ について）ではない！

$$\Downarrow$$

$\widehat{\sigma}_\varphi$ のリスクの不偏推定量を求めて，それを用いてミニマックスリスクと比較！

(2) 推定量の族の関係.



$\widehat{\mathscr{R}}_{\widehat{\sigma}_\varphi}$ は $\mathscr{R}(\widehat{\sigma}_\varphi, \sigma)$ の不偏推定量，i.e., $\mathbb{E}[\widehat{\mathscr{R}}_{\widehat{\sigma}_\varphi}] = \mathscr{R}(\widehat{\sigma}_\varphi, \sigma)$ とする．このとき，

$$\widehat{\mathscr{R}}_{\widehat{\sigma}_\varphi} \leq \alpha(\text{ミニマックスリスク}) \Longrightarrow \mathscr{R}(\widehat{\sigma}_\varphi, \sigma) \leq \alpha.$$

$\square$

補題 4 [27]

$$\mathbb{E}[(\sigma^{-1}|\widehat{\sigma}_{\varphi})] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{r}\left\{2\frac{\partial\varphi_j}{\partial\lambda_j}+\left(2N-\frac{2v}{r}\right)\frac{\varphi_j}{\lambda_j}+2g\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\varphi_i-\varphi_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right\}\right].$$

注意１２ 証明は [46] をまねる. □

補題 5 [27]

$\mathbb{E}[(\sigma^{-1}|\widehat{\sigma}_{\varphi})-\log\det(\widehat{\sigma}_{\varphi})]$ の不偏推定量は

$$\sum_{j=1}^{r}\left\{2\frac{\partial\varphi_j}{\partial\lambda_j}+\left(2N-\frac{2v}{r}\right)\frac{\varphi_j}{\lambda_j}+2g\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\varphi_i-\varphi_j}{\lambda_i-\lambda_j}-\log\varphi_j\right\}\mathbb{1}_{\{\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_r>0\}}.$$

直交不変な推定量の例

定理１：Dey-Srinivasan の minimax 推定量 [27]

$\varphi_j(\boldsymbol{a}) = \tilde{\delta}_j a_j = \{2N + g(r-2j+1)\}^{-1} a_j$ とする．このとき，

$$\mathscr{R}(K \sum_{j=1}^{r} \varphi_j(\boldsymbol{a}) c_j, \sigma) \leq -\sum_{j=1}^{r} \left\{ \log \tilde{\delta}_j + \mathbb{E}[\log u_j^2] \right\}, \qquad \text{with } u_j^2 \sim \chi^2_{2N-g(j-1)}.$$

crude Stein 推定量 [27]

$$\widehat{\sigma}_{st} = K \sum_{j=1}^{r} \frac{\lambda_j}{2N - 2v/r + 2g \sum_{\ell \neq j} \lambda_j/(\lambda_j - \lambda_\ell)} \mathbb{1}_{\{\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r > 0\}} c_j.$$

注意１３ 導出は [46] をまねる．

まとめにかえて：Directions in “Beyond Muirhead” toward Revival of Multivariate Statistical Analysis

- ⋆ EJA approach via [15] leads to an easy and better appraoch to the math aspect of multivariate statistical analysis([42, 14, 10]); a lot of inference problems to be generalized to symmetric cone set-up via EJA.
- ⋆ Gear up to homogeneous cones!
- ⋆ Highly structured multivariate models; models via conditional independence, e.g., graphical models [31, 53], LCI models [5, 3, 40].
- ⋆ Higher-dimensional approach ($p \gg n$) to multivariate statistical analysis!

$$\Downarrow$$

⋆Need some help from RMT or free Probability?

⋆Regularization technique?

- ⋆ Bayesian approach and shrinkage prediction.

References

[1] H.H. Andersen, M. Højbjerre, D. Sørensen, P.S. Eriksen, Linear and Graphical Models, Springer-Verlag, New York (1995).

[2] S.A. Andersson, Invariant normal models, *Ann. Statist.* **3** (1975) 132-154.

[3] S.A. Andersson, J. Madsen, Symmetry and lattice conditional independence in a multivariate normal distribution, *Ann. Statist.* **26** (1998) 525-572.

[4] S.A. Andersson, M.D. Perlman, Two testing problems relating the real and complex multivariate normal distributions, *J. Multivariate Anal.* **15** (1984) 21-51.

[5] S.A. Andersson, M.D. Perlman, Lattice models for conditional independence in a multivariate normal distribution, *Ann. Statist.* **21** (1993) 1318-1358.

[6] S.A. Andersson, G.G. Wojnar, The Wishart distributions on homogeneous cones, *J. Theoret. Prob.* **16** (2004) 781-818.

[7] Z.D. Bai, Methodologies in spectral analysis of large dimensional random matrices, a reivew. *Statistica Sinica* **9** (1999) 611-677.

[8] J. Bonder, P. Milnes, Amenability: A survey for statistical applications of Hunt-Stein and related conditions on groups, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **57** (1981) 103-128.

[9] M. Casalis, G. Letac, The Lukas-Olkin-Rubin characterization of Wishart distributions on symmetric cones, *Ann. Statist.* **24** (1996) 763-786.

[10] Y. Chikuse, Statistics on special Manifolds, Springer (2003).

[11] G. Consonni, P. Veronese, Enriched conjugate and reference priors for the Wishart family on symmetric cones, *Ann. Statist.* **31** (2003) 1491-1516.

[12] D.K. Dey, C. Srinivasan, Estimation of a covariance matrix under Stein's loss, *Ann. Statist.* **13** (1985) 1581-1591.

[13] M.L. Eaton, Group Invariance Application in Statistics, Regional conference series in Probability and Statistics Vol. 1, Institute of Mathematical Statistics (1989).

[14] R.H. Farrell, MULTIVARIATE CALCULATION, Springer-Verlag (1985).

[15] J. Faraut, K. Korányi, ANALYSIS ON SYMMETRIC CONES, Oxford Science Publications (1994).

[16] L. Faybusovich, Euclidean Jordan algebras and interior-point algorithms, *Positivity* **1** (1997) 331-357.

[17] L. Faybusovich, T. Tsuchiya, Primal-dual algorithms and infinite-dimensional Jordan algebras of finite rank, *Math. Program Ser. B* **97** (2003) 471-493.

[18] M. Fonseca, J.T. Mexia, R. Zmyslony, Binary operations on Jordan algebras and orthogonal normal models, *Linear Albegra Appl.* **417** (2006) 75-86.

[19] N.R. Goodman, Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution (An introduction), *Ann. Math. Statist.* **34** (1963) 152-176.

[20] K.I. Gross, D.St.P. Richards, Special functions of matrix argument. I: algebraic induction, zonal polynomials, and hypergeometric functions, *Tran. Amer. Math. Soc.* **301** (1987) 781-811.

[21] P. Graczyk, G. Letac, H. Massam, The complex Wishart distribution and symmetric group, *Ann. Statist.* **31** (2003) 287-309.

[22] L.R. Haff, The variational form of certain Bayes estimators, *Ann. Statist.* **19** (1992) 1163-1190.

[23] H. Ishi, Positive Reisz distributions on homogeneous cones, *J. Math. Soc. Japan*, **52** (2000) 161-186.

[24] H. Ishi, 開凸錐に付随する Wishart 分布（P. Graczyk 氏との共同研究）, シンポジウム「生物情報を解明するための統計理論とその応用」, 2007, 12-22.

[25] W. James, C. Stein, Estimation with quadratic loss, in Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. **1** 361-380, Univ. California Press (1961).

[26] C.G. Khatri, Classical statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution, *Ann. Math. Statist.* **36** (1965) 98-114.

[27] Y. Konno, Estimation of a normal covariance matrix parametrized by irreducible symmetric cones under Stein's loss, *J. Multivairate Anal.* **98** (2007) 295-316.

[28] Y. Konno, Improving on the sample covariance matrix for a complex elliptically contoured distribution. *J. Statist. Plan. Infer.* **137** (2007) 2475-2486.

[29] Y. Konno, A class of orthogonally invariant Minimax estimators for normal covariance matrices parametrized by simple Jordan algebras of degree 2, *J. Statist. Studies* **26** (2007) 67-75.

[30] T. Kubokawa, M.S. Srivastava, Robust improvement in estimation of a covariance matrix in an elliptically contoured distribution, *Ann. Statist.* **27** (1999) 600–609.

[31] S.L. Lauritzen, GRAPHICAL MODELS, Oxford Univ. Press (1996).

[32] G. Letac, H. Massam, REPRESENTATION OF THE WISHART DISTRIBUTIONS, in Contemporary Mathematics **261** (2000) 121-142.

[33] G. Letac, H. Massam, A tutorial on non central Wishart distributions. Available at http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Letac/Wishartnoncentrales.pdf.

[34] G. Letac, H. Massam, Wishart distributions for decomposable graphs, *Ann. Statist.* **35** (2007) 1278–1323.

[35] S.P. Lin, M.D. Perlman, A Monte Carlo comparison of four estimators for a covariance matrix, in MULTIVARIATE ANALYSIS VI (P.R. Krishnaiah, ed.) 411-426, North-Holland, Amsterdam (1985).

[36] D. Maiward, D. Kraus, Calculation of moments of complex Wishart and complex inverse Wishart distributed matrices, *Radar, Sonar and Navigation, IEEE Proceedings* **147** (2000) 162 - 168.

[37] J.D. Malley, STATISTICAL APPLICATIONS OF JORDAN ALGEBRAS, Lecture notes in Statistics 91, Springer-Verlag (1994).

[38] H. Massam, An Exact decomposition theorem and a unified view of some related distributions for a class of exponential transformation models on symmetric cones, *Ann. Statist.* **32** (1994) 389-394.

[39] H. Massam, E. Neher, On transformations and determinants of Wishart variables on symmetric cones, *J. Theoret. Probat.* **10** (1997) 867-902.

[40] H. Massam, E. Neher, Estimation and testing for lattice conditional independence models of Euclidean Jordan algebras, *Ann. Statist.* **26** (1998) 1051-1082.

[41] M.L. Mehta, Matrix Theory, Les Editions de Phsique, 91944 Les Ulis Cedex, France (1989).

[42] R.J. Muirhead, Aspects of Multivariate Statistical Analysis, John Wiley & Sons, Inc (1982).

[43] F. Perron, Minimax estimators of a covariance matrix, *J. Multivariate Anal.* **43** (1992) 6-28.

[44] I.I. Pyatetskii-Shapiro, Automorphic Functions and the Geometry of Classical Domains, Mathematics and its Applications vol.8, Gordon and Breach (1969).

[45] P. Shaman, The inverted complex Wishart distribution and its application to spectral estimation, *J. Multivariate Anal.* **10** (1980) 51-59.

[46] Y. Sheena, Unbiased estimator of risk for an orthogonally invariant estimator of a covariance matrix, *J. Japan Statist. Soc.* **25** (1995) 35-48.

[47] Y. Sheena, A. Takemura, Inadmissibility of non-order-preserving orthogonally invariant estimators of the covariance matrix in the case of Stein's loss, *J. Multivariate Anal.* **41** (1992) 117-131.

[48] C. Stein, Lectures on the theory of estimation of many parameters, in STUDIES IN THE STATISTICAL THEORY OF ESTIMATION I(I. A. Ibragimov and M. S. Nikulin, eds.) (1977).

[49] L. Svensson, M. Lundberg, Estimating complex covariance matrix, *Signals, Systems and Computers, Conference Record of the Thirty-Eighth Asilomar Conference* **2** (2004) 7-10 2151 - 2154.

[50] A. Takemura, An orthogonally invariant minimax estimators of the covariance matrix of a multivariate normal populations, *Tsukuba J. Math.* **8** (1984) 365-376.

[51] A. Takemura, Y. Sheena, Distribution of eigenvalues and eigenvectors of Wishart matrix when the population eigenvalues are infinitely dispersed and its application to minimax estimation of covariance matrix, *J. Multivariate Anal.* **94** (2005) 271-299.

[52] S. Tolver Jensen, Covariance hypotheses which are linear in both the covariance and the inverse covariance, *Ann. Statist.* **16** (1988) 302-322.

[53] M.J. Wainwright, M.I. Jordan, Graphical models, exponential families, and variationaal inference,Technical Report 649, Department of Statistics, University of California, Berkeley, 2003, available at http://www.cs.berkeley.edu / jordan/publications.html.

[54] J. Wishart, The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population, *Biometrika* **20A** (1928), 32-52.

[55] 伊吹山知義，Koecher-Maass series on tube domain，1(999) available at http://www.math.wani.osaka-u.ac.jp/group/numberth/workshop/autumn98 /proc/proc.html.

[56] 志摩裕彦，ヘッセ幾何学，裳華房 (2001).

[57] 竹村彰通，多変量推測統計の基礎，共立出版 (1991).

[58] 野村隆昭, Jordan 代数と解析学 (1993), avilable at http://www.math.kyushu-u.ac.jp/ tnomura/ARTICJP/indexajp.html.