Recent Advances in Statistical Inference - in Honor of Professor Masafumi Akahira

（2008 年 12 月 16 日・筑波大学）

Shrinkage estimators for covariance matrices in multivariate complex normal distributions

日本女子大学理学部　　今野 良彦

December 12, 2008

この講演の目的と構成

近年，データ数よりも変量の次元が高いデータ（高次元データ）の解析のための多変量推測理論の構築が注目を集めている．本講演では，高次元データの設定のもとで多変量複素正規分布の共分散行列(Large Covariance matrix)の推定問題を統計的決定理論の枠組みで考察した結果を報告する．

本講演の構成

(1) 複素正規分布と複素 Wishart 分布について;
(2) 記号と問題設定;
(3) 先行研究について;
(4) 推定量のクラスとリスクの評価の方針(SURE 法);
(5) リスクの不偏推定量(SURE)の導出;
(6) 改良型推定量について.

複素正規分布(1)

⋆ 複素確率変数 X は

$$X = \mathrm{Re}X + \sqrt{-1}\mathrm{Im}X, \qquad [X] = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}X \\ \mathrm{Im}X \end{pmatrix};$$

ReX, ImX は X の実部と虚部.

⋆ X は標準複素正規分布 $\mathbb{C}N(0, 1)$ に従うとは

$$[X] = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}X \\ \mathrm{Im}X \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

⋆ X の確率密度関数(w.r.t. Lebesgue measure on $\mathbb{C}$)は

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-\bar{x}x), \qquad x \in \mathbb{C}, \qquad \bar{x}は\ x\ の\ \text{complex conjugate.}$$

複素正規分布(2)

$\star$ $Z \sim \mathbb{C}N(0,\,1)$, $\theta \in \mathbb{C}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ に大して

$$X := \theta + \sigma Z \sim \mathbb{C}N(\theta,\,\sigma^2).$$

$\star$ $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^p$ は複素確率ベクトルとする．$\forall \boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^p$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{C}^p$, $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathrm{Herm}(p,\,\mathbb{C})_+$ に対して，

$$\boldsymbol{c}^*\boldsymbol{X} \sim \mathbb{C}N(\boldsymbol{c}^*\boldsymbol{\theta},\,\boldsymbol{c}^*\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c}) \Longleftrightarrow \boldsymbol{X} \sim \mathbb{C}N_p(\boldsymbol{\theta},\,\boldsymbol{\Sigma}).$$

ただし，$\boldsymbol{c}^*$ は $\boldsymbol{c}$ の transpose complex conjugate である．

$\star$ $\boldsymbol{X} \sim \mathbb{C}N_p(\boldsymbol{\theta},\,\boldsymbol{\Sigma})$ の確率密度関数(w.r.t. Lebesgue measure on $\mathbb{C}^p$)は

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\pi^p}(\mathrm{Det}\,\boldsymbol{\Sigma})^{-1/2}\exp\{-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta})^*\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta})\}.$$

複素正規分布 (3)

$\star$ $\boldsymbol{Z} \sim \mathbb{C}N_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$ のとき，

$$[\boldsymbol{Z}] := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\boldsymbol{Z} \\ \mathrm{Im}\,\boldsymbol{Z} \end{pmatrix} \sim N_{2p}(\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\boldsymbol{\theta} \\ \mathrm{Im}\,\boldsymbol{\theta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\boldsymbol{\Sigma} & -\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\Sigma} \\ \mathrm{Im}\,\boldsymbol{\Sigma} & \mathrm{Re}\,\boldsymbol{\Sigma} \end{pmatrix})$$

ただし，$\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\Sigma}$, $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\Sigma}$ は symmetric と skew-symmetric.

複素 Wishart 分布(1)

$\star$ p 次元複素確率ベクトル $\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \cdots, \boldsymbol{Z}_n$ は独立同一に $\mathbb{C}N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ に従うとする．このとき，

$$\boldsymbol{W} := \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Z}_i \boldsymbol{Z}_i^*$$

は母数 $\mathbf{\Sigma}$, p, n の複素 Wishart 分布に従うといい，$\mathbb{C}W_p(\mathbf{\Sigma}, n)$ と書く．

$\star$ $n \geq p$ のとき，$\mathbb{P}(\boldsymbol{W}$ は正定値$) = 1$ で，$\boldsymbol{W}$ の確率密度関数(w.r.t. Lebesgue measure on $\mathrm{Herm}^+(\mathbb{C}, p)$)は

$$f_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{w}) = \frac{\mathrm{Det}\,(\boldsymbol{w})^{n-p} \exp(-\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{w}\mathbf{\Sigma}^{-1}))}{\mathrm{Det}\,(\mathbf{\Sigma})^{n} \pi^{p(p-1)/2} \Pi_{j=1}^{p} \Gamma(n+1-j)}, \qquad \boldsymbol{w} \in \mathrm{Herm}^+(\mathbb{C}, p)$$

ただし，$\Gamma(\cdot)$ は Euler's gamma function.

記号と問題設定(1)

⋆ $\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \ldots, \boldsymbol{Z}_n \sim \mathbb{C}N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$．各 $Z_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ は p 変量確率(縦)ベクトルで，独立同一に p 変量複素正規分布に従う．ただし，$\boldsymbol{\Sigma}$ は $p \times p$ の正値エルミート行列で未知.

⋆ n は (標本数 - 1) で，p は変量の次元.

⋆ Wishart 確率行列($p \times p$ の行列) $\boldsymbol{W} := \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{Z}_i \boldsymbol{Z}_i^*$．ただし，“ $*$ ” はベクトルや行列の transpose complex conjugate を示す.

⋆ 共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の推定問題を損失関数

$$L(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma}) = \mathrm{Tr}\,(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - I_p)^2$$

のもとで考える．ここで，$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ は $\boldsymbol{\Sigma}$ の推定量，$\boldsymbol{I}_p$ は $p \times p$ の単位行列，Tr は行列のトレースを表す.

⋆ $\boldsymbol{W}$ の分布に関する損失関数 L の期待値 $R(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma}) := \mathbb{E}[L(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma})]$ をリスクとよぶ．$\boldsymbol{\Sigma}$ に関して一様に推定量のリスクを比較したい.

記号と問題設定(2)

$\star$ 平均を $\mathbf{0}$ としたことは本質的ではない;

$\star$ Wishart 確率行列 $\boldsymbol{W}$ は正定値 $\Longleftrightarrow n \geq p$;

$\star$ Wishart 確率行列 $\boldsymbol{W}$ の分布は(n は正整数のとき)常に存在するが，確率密度関数は $n \geq p$ のとき存在;

$\star$ 変換 $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} \mapsto \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{A}'$; $\boldsymbol{\Sigma} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}'$($\boldsymbol{A}$ は $p \times p$ の正則行列)に関して不変な損失関数：

$$L(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma}) = \mathrm{Tr}\,(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - I_p)^2;\; L_S(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma}) = \mathrm{Tr}\,(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}) - \log \mathrm{Det}(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}) - p.$$

ただし，Det は行列式．しかし，$n < p$ のとき，L_S は $n^{-1}\boldsymbol{W}$ （L_S の期待値)を評価できない.

先行研究について (1)

$\boxed{\text{推定量 } n^{-1}\boldsymbol{W} \text{ の問題点}}$

⋆ $\mathbb{E}[n^{-1}\boldsymbol{W}] = \boldsymbol{\Sigma}$ だが，$n^{-1}\boldsymbol{W}$ の固有根は，$\boldsymbol{\Sigma}$ の固有根よりも広がっている．(Marchenko-Pastur law).

⋆ $n < p$ のとき，$\boldsymbol{\Sigma}$ は正定値であるにもかかわらず，$n^{-1}\boldsymbol{W}$ は正定値ではない.

先行研究について (2)

$\boxed{n \geq p \text{ の場合の先行研究}}$

⋆ 損失関数 L_S のもとでは，$n^{-1}\boldsymbol{W}$ の固有根をShrinkage-expansion method を用いた改良型推定量．Svensson (2004), Konno (2007a, 2007b), Konno(2009).

⋆ リスクを評価するために，SURE 法が有効 — 部分積分の公式と eigenvalue-caluculus　$\rightarrow n < p$ の場合は？

⋆ 損失関数 L のもとでは，Konno (2009)(Haff (1980) は実 Wishart の場合) の結果　$\rightarrow n < p$ の場合は？

先行研究について (3)

$n < p$ の場合の実 Wishart 行列に対する先行研究

- ⋆ $\boldsymbol{S} \sim W_p(\boldsymbol{\Sigma}, n)$ とする．ただし，$\boldsymbol{\Sigma}$ は正定値行列である;
- ⋆ Ledoit and Wolf (2004): 損失関数 $\mathrm{Tr}(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\Sigma})^2$ のもとで，$n^{-1}\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{I}_p$ の線形結合のなかで漸近的(n/p は有界)に最適なもの．積率の条件のみで分布に依存しない結果;
- ⋆ Wu and Pourahmadi (2003), Bickel and Levina (2008): banding approach. 漸近的に評価;
- ⋆ Furrer and Bengtsson (2007): “tapering”;
- ⋆ AOS (2009) に特集.

問題設定の復習

$\star$ $\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \ldots, \boldsymbol{Z}_n \sim \mathbb{C}N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$．各 $\boldsymbol{Z}_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ は p 変量確率 (縦) ベクトルで，独立同一に p 変量複素正規分布に従う．ただし，$\boldsymbol{\Sigma}$ は $p \times p$ の正値エルミート行列で未知.

$\star$ n は (標本数 - 1) で，p は変量の次元;

$\star$ Wishart 確率行列 ($p \times p$ の行列) $\boldsymbol{W} := \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{Z}_i \boldsymbol{Z}_i^*$ に基づき，共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の推定問題を損失関数

$$L(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma}) = \mathrm{Tr}\,(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - I_p)^2$$

のもとで考える．ここで，$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ は $\boldsymbol{\Sigma}$ の推定量;

$\star$ $\boldsymbol{W}$ の分布に関する損失関数 L の期待値 $R(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma}) := \mathbb{E}[L(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma})]$ をリスクとよぶ．$\boldsymbol{\Sigma}$ に関して一様に推定量のリスクを比較したい.

推定量のクラス

$\star$ $\boldsymbol{W} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Z}_i \boldsymbol{Z}_i^*$ を分解する：$\ell_1 \geq \cdots \ell_n$ は $\boldsymbol{W}$ の固有値で,

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{L} \boldsymbol{U}_1^*, \qquad \boldsymbol{L} = \mathrm{Diag}(\ell_1, \ldots, l_n);$$

$\boldsymbol{U}_1$ は $p \times n$ の半直交行列 s.t. $\boldsymbol{U}_1^* \boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{I}_n$.

推定量のクラス

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{L}) \boldsymbol{U}_1^*, \tag{1}$$

ただし，$\boldsymbol{\Psi} := \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{L}) = \mathrm{Diag}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ で $\psi_k := \psi_k(\boldsymbol{L}) (k = 1, 2, \ldots, n)$ は $\mathbb{R}^n_{\geq}$ から $\mathbb{R}$ への可微分関数.

目標　$\boldsymbol{\Sigma}$ に依存するリスク $\mathbb{E}[\mathrm{Tr}\,(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \boldsymbol{I}_p)^2]$ を評価したい！

推定量のクラスとリスクの評価の方針（ SURE 法)

$\star$ リスク $\mathbb{E}[\mathrm{Tr}\,(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}-\boldsymbol{I}_p)^2]$ の不偏推定量 $\widehat{\boldsymbol{R}}(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}})$ ($\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ と $\ell_1,\ldots,\ell_n$ を通して $\boldsymbol{W}$ のみ依存)を導出：

$$\mathbb{E}[\mathrm{Tr}\,(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}-\boldsymbol{I}_p)^2]=\mathbb{E}[\widehat{\boldsymbol{R}}(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}})]$$

$\star$ $\mathbb{E}[\mathrm{Tr}\,(n^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}-\boldsymbol{I}_p)^2]$ は定数リスクなので,

$$\widehat{\boldsymbol{R}}(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}})\le\mathbb{E}[\mathrm{Tr}\,(n^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}-\boldsymbol{I}_p)^2]$$

ならば,

$$\mathbb{E}[\mathrm{Tr}\,(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}-\boldsymbol{I}_p)^2\le\mathbb{E}[\mathrm{Tr}\,(n^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}-\boldsymbol{I}_p)^2]$$

がわかる.

$\boxed{\text{SURE の導出}}$ 推定量の族 (1) に対して，リスクの不偏推定量 $\widehat{\boldsymbol{R}}(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}})$ を導出する.

部分積分の公式と SURE 法(1)

⋆ $(z_{ij})_{i=1,\dots,n;\,j=1,\dots,p} := [\boldsymbol{Z}_1,\ \boldsymbol{Z}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{Z}_n]^* \sim \mathbb{C}N_{n\times p}(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma})$;

⋆ $n \times p$ の行列作用素 $\nabla_{\boldsymbol{Z}}$ を次で定める：

$$\nabla_{\boldsymbol{Z}} = \left(\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right)_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,p}} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\mathrm{Re}\, z_{ij})} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\frac{\partial}{\partial(\mathrm{Im}\, z_{ij})}\right)_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,p}};$$

⋆ 行列 $\nabla_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{A}$ の $(i,\ j)$ 成分を

$$(\nabla_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{A})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial a_{kj}}{\partial z_{ik}} \qquad \text{for } i = 1,\ 2,\ \dots,\ n;\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ p.$$

部分積分の公式と SURE 法(2)

$\boxed{\text{補題 1}}$ $[\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \dots, \boldsymbol{Z}_n]^* \sim \mathbb{C}N_{n\times p}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma})$ とし，$\boldsymbol{W} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{Z}_i \boldsymbol{Z}_i^*$ とおいたとき，$p \times p$ 関数 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{W})$ に対して，

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}\right] = \mathbb{E}\left[n\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{Z}'\nabla_{\boldsymbol{Z}})'\boldsymbol{G}\right].$$

特に，

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}\right)\right] = \mathbb{E}\left[n\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{G}\right) + \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{Z}'\nabla_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{G}'\right)\right].$$

ただし，$'$ は転置.

部分積分の公式と SURE 法(3)

⋆ 補題 1 において，$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{U}_1 \mathrm{Diag}(\ell_1^{-1}\psi_1,\ \ldots,\ \ell_n^{-1}\psi_n)\boldsymbol{U}_1^*$ とおく：

$\boxed{\text{補題 2}}$ それぞれの期待値が存在するとき,

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{U}_1^*\right] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Psi}^{(1c)}\boldsymbol{U}_1^* + \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{I}_p - \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^*)\right].$$

ただし，$\boldsymbol{\Psi}^{(1c)} = \mathrm{Diag}(\psi_1^{(1c)}, \psi_2^{(1c)}, \ldots,\ \psi_n^{(1c)})$ で $\psi_k^{(1c)} = \sum_{b\neq k}^n \frac{\psi_k-\psi_b}{\ell_k-\ell_b} + \frac{\partial\psi_k}{\partial\ell_k}$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. 特に，complex analog of Kubokawa and Srivastava (2008)'s identity として,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left\{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{U}_1^*\right\}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n\left\{(p-n)\frac{\psi_k}{\ell_k} + \frac{\partial\psi_k}{\partial\ell_k} + \sum_{b\neq k}^n \frac{\psi_k-\psi_b}{\ell_k-\ell_b}\right\}\right].$$

部分積分の公式と SURE 法(4)

$\boxed{\text{補題 3}}$　$\widehat{\mathbf{\Sigma}} = \boldsymbol{U}_1 \mathbf{\Psi}(\boldsymbol{L}) \boldsymbol{U}_1^*$ に対して，

$$\mathbb{E}[\mathrm{Tr}\,\{\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{U}_1\mathbf{\Psi}\boldsymbol{U}_1^*\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{U}_1\mathbf{\Psi}\boldsymbol{U}_1^*\}] = \mathbb{E}[\mathrm{Tr}\,\{\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{U}_1\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{(1)}\boldsymbol{U}_1^*\}].$$

ただし，$\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{(1)} = \mathrm{Diag}(\tilde{\psi}_1^{(1)}, \tilde{\psi}_2^{(1)}, \ldots, \tilde{\psi}_n^{(1)})$ で

$$\tilde{\psi}_k^{(1)} = (p-n)\frac{\psi_k^2}{\ell_k} + 2\psi_k \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial \ell_k} + 2\psi_k \cdot \sum_{b \neq k}^{n} \frac{\psi_k - \psi_b}{\ell_k - \ell_b}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

部分積分の公式と SURE 法(5)

$\boxed{\text{定理 4}}$ $\widehat{\mathbf{\Sigma}} = \boldsymbol{U}_1 \mathbf{\Psi}(\boldsymbol{L}) \boldsymbol{U}_1^*$ に対して,

$$R(\widehat{\mathbf{\Sigma}}, \mathbf{\Sigma}) = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{n}\Big\{(p-n)\Big(\frac{\widetilde{\psi}_k^{(1)}}{\ell_k} - 2\frac{\psi_k}{\ell_k}\Big) + \Big(\frac{\partial \widetilde{\psi}_k^{(1)}}{\partial \ell_k} - 2\frac{\partial \psi_k}{\partial \ell_k}\Big) + \sum_{b\neq k}^{n} \frac{(\widetilde{\psi}_k^{(1)} - 2\psi_k) - (\widetilde{\psi}_b^{(1)} - 2\psi_b)}{\ell_k - \ell_b}\Big\} + p\Big].$$

ただし，$\widetilde{\psi}_k^{(1)} = (p-n)\psi_k^2/\ell_k + 2\psi_k(\partial\psi_k/\partial\ell_k) + 2\psi_k \sum_{b\neq k}^{n}(\psi_k - \psi_b)/(\ell_k - \ell_b)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

改良型推定量(1)

推定量の族　$n < p$ とする．つぎの推定量の族を考える：

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_t = \frac{1}{p+n}\Big(\boldsymbol{W} + \frac{t}{\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{W}^+}\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^*\Big).$$

ただし，$\boldsymbol{U}_1$ は $p \times n$ の半直交行列で, $\boldsymbol{W}$ の正の固有値に対応する固有ベクトルを並べたのもの，$\boldsymbol{S}W^+$ は $\boldsymbol{S}$ の Moore-Penrose の逆行列，t は正の定数である．

結果　$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_t$ のリスクの不偏推定量(SURE)を導出し，リスクを評価することにより次の結果を得る．

$0 < t < 2(n-1)(p-n+1)/\{(p-n+1)(p-n+2)\}$ のとき，すべての $\boldsymbol{\Sigma}$ に対して，$R(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_t, \boldsymbol{\Sigma}) \le R(n^{-1}\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\Sigma})$ が成立する．

改良型推定量(2)

$\star$ $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_t$ は正定値ではない.

$\star$ $\frac{1}{p+n}\left(\boldsymbol{W} + \frac{t}{\operatorname{Tr}\boldsymbol{W}^{+}}\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^*\right)$ を修正したもの:

$$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_t = \frac{1}{p+n}\left\{\boldsymbol{W} + \frac{t}{\operatorname{Tr}\boldsymbol{W}}\boldsymbol{I}_p\right\}.$$

$\star$ 残念なことに，推定量 $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_t$ のリスクを SURE を用いて評価できない！

$\star$ 数値実験で調べたい.